

Introducción (breve) a las teorías gauge

Mauricio Bustamante

Pontificia Universidad Católica del Perú

12 de Noviembre del 2010

Contenido

- 1 Introducción
- 2 Lagrangianos en teorías de campo relativistas
- 3 Invariancia gauge local
- 4 Reglas de Feynman
- 5 Rompimiento espontáneo de simetría y mecanismo de Higgs

Contenido

- 1 Introducción
- 2 Lagrangianos en teorías de campo relativistas
- 3 Invariancia gauge local
- 4 Reglas de Feynman
- 5 Rompimiento espontáneo de simetría y mecanismo de Higgs

teoría cuántica de campos = mecánica cuántica + relatividad especial

Describe:

- ▶ creación y aniquilación de partículas
- ▶ las interacciones entre ellas

e.g., **Modelo Estándar**: describe todas las partículas elementales conocidas (hasta energías de $\sim 1 \text{ TeV}$)

Veremos:

- ▶ cómo se construye una teoría cuántica de campos sencilla (QED)
- ▶ cómo el mecanismo de Higgs genera las masas de los bosones masivos

teoría cuántica de campos = mecánica cuántica + relatividad especial

Describe:

- ▶ creación y aniquilación de partículas
- ▶ las interacciones entre ellas

e.g., **Modelo Estándar**: describe todas las partículas elementales conocidas (hasta energías de $\sim 1 \text{ TeV}$)

Veremos:

- ▶ cómo se construye una teoría cuántica de campos sencilla (QED)
- ▶ cómo el mecanismo de Higgs genera las masas de los bosones masivos

teoría cuántica de campos = mecánica cuántica + relatividad especial

Describe:

- ▶ creación y aniquilación de partículas
- ▶ las interacciones entre ellas

e.g., Modelo Estándar: describe todas las partículas elementales conocidas (hasta energías de ~ 1 TeV)

Veremos:

- ▶ cómo se construye una teoría cuántica de campos sencilla (QED)
- ▶ cómo el mecanismo de Higgs genera las masas de los bosones masivos

teoría cuántica de campos = mecánica cuántica + relatividad especial

Describe:

- ▶ creación y aniquilación de partículas
- ▶ las interacciones entre ellas

e.g., **Modelo Estándar**: describe todas las partículas elementales conocidas (hasta energías de ~ 1 TeV)

Veremos:

- ▶ cómo se construye una teoría cuántica de campos sencilla (QED)
- ▶ cómo el mecanismo de Higgs genera las masas de los bosones masivos

teoría cuántica de campos = mecánica cuántica + relatividad especial

Describe:

- ▶ creación y aniquilación de partículas
- ▶ las interacciones entre ellas

e.g., Modelo Estándar: describe todas las partículas elementales conocidas (hasta energías de ~ 1 TeV)

Veremos:

- ▶ cómo se construye una teoría cuántica de campos sencilla (QED)
- ▶ cómo el mecanismo de Higgs genera las masas de los bosones masivos

teoría cuántica de campos = mecánica cuántica + relatividad especial

Describe:

- ▶ creación y aniquilación de partículas
- ▶ las interacciones entre ellas

e.g., Modelo Estándar: describe todas las partículas elementales conocidas (hasta energías de ~ 1 TeV)

Veremos:

- ▶ cómo se construye una teoría cuántica de campos sencilla (QED)
- ▶ cómo el mecanismo de Higgs genera las masas de los bosones masivos

Recordemos la formulación Lagrangiana de la mecánica clásica:

$$L = T - U$$

Energía cinética: $T(q_i, \dot{q}_i) = \frac{1}{2}m|\vec{\dot{q}}|^2$

Energía potencial: $U = U(q_i)$

$$q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z, \dot{q}_1 = v_x, \dot{q}_2 = v_y, \dot{q}_3 = v_z$$

Del principio variacional,

$$\delta \int L(q_i, \dot{q}_i) dt = 0 ,$$

se deducen las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} .$$

Contenido

- 1 Introducción
- 2 **Lagrangianos en teorías de campo relativistas**
- 3 Invariancia gauge local
- 4 Reglas de Feynman
- 5 Rompimiento espontáneo de simetría y mecanismo de Higgs

En teoría de campos, las variables dinámicas son ahora los campos $\phi_i(t, \vec{x}) \equiv \phi_i(x)$ que describen a las partículas.

Introducimos la “densidad Lagrangiana”

$$\mathcal{L} = \mathcal{L} [\phi_i(t, \vec{x}), \partial_\mu \phi_i(t, \vec{x})]$$

a partir de la cual el Lagrangiano se calcula como

$$L = \int \mathcal{L} dx^4 .$$

Ecuaciones de Euler-Lagrange:



En teoría de campos, las variables dinámicas son ahora los campos $\phi_i(t, \vec{x}) \equiv \phi_i(x)$ que describen a las partículas.

Introducimos la “densidad Lagrangiana”

$$\mathcal{L} = \mathcal{L} [\phi_i(t, \vec{x}), \partial_\mu \phi_i(t, \vec{x})]$$

a partir de la cual el Lagrangiano se calcula como

$$L = \int \mathcal{L} dx^4 .$$

Ecuaciones de Euler-Lagrange:

Antes

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

Ahora

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i}$$

En teoría de campos, las variables dinámicas son ahora los campos $\phi_i(t, \vec{x}) \equiv \phi_i(x)$ que describen a las partículas.

Introducimos la “densidad Lagrangiana”

$$\mathcal{L} = \mathcal{L} [\phi_i(t, \vec{x}), \partial_\mu \phi_i(t, \vec{x})]$$

a partir de la cual el Lagrangiano se calcula como

$$L = \int \mathcal{L} dx^4 .$$

Ecuaciones de Euler-Lagrange:

Antes

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

Ahora

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i}$$

En teoría de campos, las variables dinámicas son ahora los campos $\phi_i(t, \vec{x}) \equiv \phi_i(x)$ que describen a las partículas.

Introducimos la “densidad Lagrangiana”

$$\mathcal{L} = \mathcal{L} [\phi_i(t, \vec{x}), \partial_\mu \phi_i(t, \vec{x})]$$

a partir de la cual el Lagrangiano se calcula como

$$L = \int \mathcal{L} dx^4 .$$

Ecuaciones de Euler-Lagrange:

Antes

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

Ahora

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i}$$

Lagrangiano de Klein-Gordon para un campo escalar (espín 0)

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i}$$

Supongamos un solo campo escalar ϕ y el Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 .$$

Entonces:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi \Rightarrow \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = \partial_\mu \partial^\mu \phi \equiv \square \phi$$

y

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi .$$

Ecuación de Euler-Lagrange:

$$(\square + m^2) \phi = 0 ,$$

que es la ecuación de **Klein-Gordon** que describe (en teoría cuántica de campos) una partícula de espín 0 y masa m .

Lagrangiano de Dirac para un campo espinorial (espín 1/2)

Consideremos el campo espinorial ψ y el Lagrangiano

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi .$$

Tratamos a ψ y su adjunto, $\bar{\psi}$, como variables de campo independientes.

Ecuación de Euler-Lagrange para $\bar{\psi}$:

$$\begin{cases} \partial\mathcal{L}/\partial(\partial_\mu\bar{\psi}) = 0 \\ \partial\mathcal{L}/\partial\bar{\psi} = i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi \end{cases} \Rightarrow i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi = 0 ,$$

que es la ecuación de **Dirac**.

Ecuación de Euler-Lagrange para ψ :

$$i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0 ,$$

que es el adjunto de la ecuación de Dirac.

Lagrangiano de Proca para un campo vectorial (espín 1)

Tomemos el campo vectorial A^μ , con el Lagragiano

$$\mathcal{L} = \frac{-1}{16\pi} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + \frac{1}{8\pi} m^2 A^\nu A_\nu .$$

Calculamos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = \frac{-1}{4\pi} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = \frac{1}{4\pi} m^2 A^\nu ,$$

con lo cual la ecuación de Euler-Lagrange queda

$$\partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + m^2 A^\nu = 0 ,$$

que es la ecuación de Proca para una partícula de espín 1 y masa m .

Lagrangiano de Proca para un campo vectorial (espín 1) [cont.]

Si definimos

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu ,$$

entonces podemos escribir

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{-1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{8\pi} m^2 A^\nu A_\nu \\ \partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu &= 0 .\end{aligned}$$

Si ponemos $m = 0$, la ecuación de Proca se reduce a las ecuaciones de **Maxwell** en el vacío:

el campo e.m. es un campo vectorial no masivo.

En mecánica clásica, L se deriva a partir de T y U : $L = T - U$.

En teoría de campos relativista, \mathcal{L} es usualmente axiomático.

\mathcal{L} se construye para poder reproducir las ecuaciones de campo deseadas: Klein-Gordon, Dirac, Proca, etc.

Hasta ahora hemos considerado sólo campos *libres*, sin fuentes ni interacciones. ►

Lagrangiano de Maxwell para un campo vectorial no masivo con fuente J^μ

Supongamos

$$\mathcal{L} = \frac{-1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - J^\mu A_\mu ,$$

con $J^\mu = (\rho, \vec{J})$ (la cuadricorriente) alguna función dada.

Ecuación de Euler-Lagrange:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi J^\nu ,$$

que son las **ecuaciones no homogéneas de Maxwell**, pues

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} .$$

Como $\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\nu \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = 0$, entonces

$$\partial_\nu J^\nu = 0 \text{ (ec. de continuidad)} ,$$

i.e., J^μ debe respetar la **conservación de la carga**.

Contenido

- 1 Introducción
- 2 Lagrangianos en teorías de campo relativistas
- 3 Invariancia gauge local
- 4 Reglas de Feynman
- 5 Rompimiento espontáneo de simetría y mecanismo de Higgs

Invariancia gauge global

El Lagrangiano de Dirac,

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi ,$$

es invariante bajo la transformación

$$\psi \rightarrow e^{i\theta}\psi ,$$

con θ real, dado que

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi \rightarrow e^{i\theta}\psi \\ \bar{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma^0 \rightarrow e^{-i\theta}\bar{\psi} \end{array} \right. \Rightarrow \left(e^{-i\theta}\bar{\psi} \right) \left(e^{i\theta}\psi \right) = \bar{\psi}\psi .$$

$\psi \rightarrow e^{i\theta}\psi$ se conoce como **transformación gauge global** o **transformación de fase global**.

Invariancia gauge local

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$$

Consideremos ahora que el factor de fase sea diferente en diferentes puntos del espacio-tiempo, i.e., $\theta = \theta(x)$ y

$$\psi \rightarrow e^{i\theta(x)}\psi .$$

\mathcal{L} no es invariante bajo esta transformación gauge local, debido a la derivada de θ :

$$\partial_\mu (e^{i\theta}\psi) = i(\partial_\mu\theta)e^{i\theta}\psi + e^{i\theta}\partial_\mu\psi ,$$

con lo cual

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} - (\partial_\mu\theta)\bar{\psi}\gamma^\mu\psi .$$

¿Cómo hacer que \mathcal{L} sea invariante bajo transformaciones gauge locales?

Conviene definir

$$\lambda(x) \equiv (1/q) \theta(x) ,$$

con q la carga de la partícula involucrada, de manera que, bajo
 $\psi \rightarrow e^{-iq\lambda(x)}\psi$,

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + (q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)\partial_\mu\lambda .$$

Demandamos que el **Lagrangiano completo** sea invariante.

Dado que el Lagrangiano libre no lo es, debemos añadirle algo:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}(\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - (q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)A_\mu ,$$

donde A_μ es un nuevo campo (**“campo gauge”**) que, bajo transformaciones gauge locales, transforma como

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu\lambda .$$

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}(\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - (q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)A_\mu$$

Veamos ...

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\rightarrow i\bar{\psi}(\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi + (q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)\partial_\mu\lambda - (q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)A_\mu - (q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)\partial_\mu\lambda \\ &= \mathcal{L} \end{aligned}$$

El nuevo Lagrangiano **sí** es invariante bajo transformaciones gauge locales.

Tuvimos que introducir un **nuevo campo vectorial** A_μ que se acopla con ψ a través del término

Pero aún falta un término para describir al campo A_μ libre ►

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}(\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - (q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)A_\mu$$

Veamos ...

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\rightarrow i\bar{\psi}(\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi + (q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)\partial_\mu\lambda - (q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)A_\mu - (q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)\partial_\mu\lambda \\ &= \mathcal{L} \end{aligned}$$

El nuevo Lagrangiano **sí** es invariante bajo transformaciones gauge locales.

Tuvimos que introducir un **nuevo campo vectorial** A_μ que se acopla con ψ a través del término

Pero aún falta un término para describir al campo A_μ libre ►

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}(\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - (q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)A_\mu$$

Veamos ...

$$\mathcal{L} \rightarrow i\bar{\psi}(\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi + \cancel{(q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)}\partial_\mu\lambda - \cancel{(q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)}A_\mu - \cancel{(q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)}\partial_\mu\lambda = \mathcal{L}$$

El nuevo Lagrangiano **sí** es invariante bajo transformaciones gauge locales.

Tuvimos que introducir un **nuevo campo vectorial** A_μ que se acopla con ψ a través del término

Pero aún falta un término para describir al campo A_μ libre ►

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}(\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - (q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)A_\mu$$

Veamos ...

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\rightarrow i\bar{\psi}(\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi + (q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)\partial_\mu\lambda - (q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)A_\mu - (q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)\partial_\mu\lambda \\ &= \mathcal{L} \end{aligned}$$

El nuevo Lagrangiano **sí** es invariante bajo transformaciones gauge locales.

Tuvimos que introducir un **nuevo campo vectorial** A_μ que se acopla con ψ a través del término

Pero aún falta un término para describir al campo A_μ libre ►

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}(\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - (q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)A_\mu$$

Veamos ...

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\rightarrow i\bar{\psi}(\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi + (q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)\partial_\mu\lambda - (q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)A_\mu - (q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)\partial_\mu\lambda \\ &= \mathcal{L} \end{aligned}$$

El nuevo Lagrangiano **sí** es invariante bajo transformaciones gauge locales.

Tuvimos que introducir un **nuevo campo vectorial A_μ** que se acopla con ψ a través del término

Pero aún falta un término para describir al campo A_μ libre ►

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}(\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - (q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)A_\mu$$

Veamos ...

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\rightarrow i\bar{\psi}(\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi + (q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)\partial_\mu\lambda - (q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)A_\mu - (q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)\partial_\mu\lambda \\ &= \mathcal{L} \end{aligned}$$

El nuevo Lagrangiano **sí** es invariante bajo transformaciones gauge locales.

Tuvimos que introducir un **nuevo campo vectorial A_μ** que se acopla con ψ a través del término

Pero aún falta un término para describir al campo A_μ libre ►

Como A_μ es campo vectorial, lo describimos con el Lagrangiano de Proca:

$$\mathcal{L} = \frac{-1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{8\pi} m_A^2 A^\nu A_\nu .$$

$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ es invariante, pero $A^\nu A_\nu$, **no**:

$$A^\nu A_\nu \rightarrow A^\nu A_\nu + A^\nu \partial_\nu \lambda + \partial_\nu \lambda A^\nu + (\partial_\nu \lambda)^2 .$$

∴ el campo gauge debe ser no masivo ($m_A = 0$) para respetar invariancia de gauge local

¿Qué hemos hecho?

- ▶ Partimos del Lagrangiano de Dirac
- ▶ Impusimos invariancia gauge local
- ▶ Nos vimos forzados a introducir un campo vectorial no masivo (A^μ)

El Lagrangiano completo es entonces

$$\mathcal{L} = \underbrace{i\bar{\psi}(\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi}_{\mathcal{L}_{\text{fermión}}} + \underbrace{\left[\frac{-1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right]}_{\mathcal{L}_{\text{bosón}}} - \underbrace{(q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) A_\mu}_{\mathcal{L}_{\text{int}}}$$

A^μ es el potencial e.m., que interactúa con el campo masivo ψ a través del acoplamiento $(q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) A_\mu \equiv J^\mu A_\mu$, con J^μ la corriente de Dirac.

∴ la imposición de invariancia gauge local, aplicada al Lagrangiano libre de Dirac, genera toda la electrodinámica

Luego de cuantizar los campos ψ y A_μ , obtendríamos QED.

La transformación gauge global puede verse como la aplicación de una matriz 1×1 unitaria sobre ψ :

$$\psi \rightarrow U\psi \quad , \quad \text{con } U^\dagger U = 1 \quad ,$$

donde $U = e^{i\theta}$.

$U(1)$: grupo de todas estas matrices

Simetría involucrada: “invariancia gauge $U(1)$ ”.

simetría local bajo ...	interacción descrita
$U(1)$	electromagnética
$SU(2)$	débil
$SU(3)$	fuerte

Modelo Estándar: invariante bajo $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$

Contenido

- 1 Introducción
- 2 Lagrangianos en teorías de campo relativistas
- 3 Invariancia gauge local
- 4 Reglas de Feynman
- 5 Rompimiento espontáneo de simetría y mecanismo de Higgs

Hasta ahora, los Lagrangianos que hemos considerado describen campos *clásicos*.

teoría clásica de campos segunda cuantización teoría cuántica de campos
 (campos clásicos) → (campos operadores)

Las *partículas* emergen como los “cuantos” de los campos asociados:

simetría	interacción	campo gauge	partícula asociada
$U(1)$	electromagnética	A^μ	fotón
$SU(2)$	débil	W^\pm, Z^0	bosones débiles
$SU(3)$	fuerte	g_1, \dots, g_8	gluones

Veamos cómo encontrar las reglas de Feynman para un Lagrangiano dado ►

Hasta ahora, los Lagrangianos que hemos considerado describen campos *clásicos*.

teoría clásica de campos segunda cuantización teoría cuántica de campos
 (campos clásicos) → (campos operadores)

Las *partículas* emergen como los “cuantos” de los campos asociados:

simetría	interacción	campo gauge	partícula asociada
$U(1)$	electromagnética	A^μ	fotón
$SU(2)$	débil	W^\pm, Z^0	bosones débiles
$SU(3)$	fuerte	g_1, \dots, g_8	gluones

Veamos cómo encontrar las reglas de Feynman para un Lagrangiano dado ►

Hasta ahora, los Lagrangianos que hemos considerado describen campos *clásicos*.

teoría clásica de campos segunda cuantización → teoría cuántica de campos
 (campos clásicos) (campos operadores)

Las *partículas* emergen como los “cuantos” de los campos asociados:

simetría	interacción	campo gauge	partícula asociada
$U(1)$	electromagnética	A^μ	fotón
$SU(2)$	débil	W^\pm, Z^0	bosones débiles
$SU(3)$	fuerte	g_1, \dots, g_8	gluones

Veamos cómo encontrar las reglas de Feynman para un Lagrangiano dado ►

Hasta ahora, los Lagrangianos que hemos considerado describen campos *clásicos*.

teoría clásica de campos segunda cuantización teoría cuántica de campos
 (campos clásicos) → (campos operadores)

Las *partículas* emergen como los “cuantos” de los campos asociados:

simetría	interacción	campo gauge	partícula asociada
$U(1)$	electromagnética	A^μ	fotón
$SU(2)$	débil	W^\pm, Z^0	bosones débiles
$SU(3)$	fuerte	g_1, \dots, g_8	gluones

Veamos cómo encontrar las reglas de Feynman para un Lagrangiano dado ►

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{libre}} + \mathcal{L}_{\text{int}}$$

$\mathcal{L}_{\text{libre}}$: Klein-Gordon (espín 0), Dirac (espín 1/2), Proca (espín 1), etc.

Lagrangiano libre → propagador

Términos de interacción → factores de vértice

Ecuaciones de campo libre:

	espacio de posición	espacio de momentum
Klein-Gordon	$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi = 0$	$[p^2 - m^2] \phi = 0$
Dirac	$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0$	$[\not{p} - m] \psi = 0$
Proca	$\partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + m^2 A^\nu = 0$	$[(-p^2 + m^2) g_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu] A^\nu = 0$

El propagador es el inverso del factor entre corchetes $([\dots]) \times i$:

Propagador de espín 0 : $\frac{i}{p^2 - m^2}$

Propagador de espín $\frac{1}{2}$: $\frac{i}{\not{p} - mc} = i \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2}$

Propagador de espín 1 : $\frac{-i}{p^2 - m^2} \left[g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{m^2} \right]$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{libre}} + \mathcal{L}_{\text{int}}$$

$\mathcal{L}_{\text{libre}}$: Klein-Gordon (espín 0), Dirac (espín 1/2), Proca (espín 1), etc.

Lagrangiano libre → propagador

Términos de interacción → factores de vértice

Ecuaciones de campo libre:

	espacio de posición	espacio de momentum
Klein-Gordon	$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi = 0$	$[p^2 - m^2] \phi = 0$
Dirac	$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0$	$[\not{p} - m] \psi = 0$
Proca	$\partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + m^2 A^\nu = 0$	$[(-p^2 + m^2) g_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu] A^\nu = 0$

El propagador es el inverso del factor entre corchetes $([\dots]) \times i$:

Propagador de espín 0 : $\frac{i}{p^2 - m^2}$

Propagador de espín $\frac{1}{2}$: $\frac{i}{\not{p} - mc} = i \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2}$

Propagador de espín 1 : $\frac{-i}{p^2 - m^2} \left[g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{m^2} \right]$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{libre}} + \mathcal{L}_{\text{int}}$$

$\mathcal{L}_{\text{libre}}$: Klein-Gordon (espín 0), Dirac (espín 1/2), Proca (espín 1), etc.

Lagrangiano libre → propagador

Términos de interacción → factores de vértice

Ecuaciones de campo libre:

	espacio de posición	espacio de momentum
Klein-Gordon	$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi = 0$	$[p^2 - m^2] \phi = 0$
Dirac	$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0$	$[\not{p} - m] \psi = 0$
Proca	$\partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + m^2 A^\nu = 0$	$[(-p^2 + m^2) g_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu] A^\nu = 0$

El propagador es el inverso del factor entre corchetes $([\dots]) \times i$:

$$\text{Propagador de espín 0 : } \frac{i}{p^2 - m^2}$$

$$\text{Propagador de espín } \frac{1}{2} : \frac{i}{\not{p} - mc} = i \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2}$$

$$\text{Propagador de espín 1 : } \frac{-i}{p^2 - m^2} \left[g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{m^2} \right]$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{libre}} + \mathcal{L}_{\text{int}}$$

$\mathcal{L}_{\text{libre}}$: Klein-Gordon (espín 0), Dirac (espín 1/2), Proca (espín 1), etc.

Lagrangiano libre → propagador

Términos de interacción → factores de vértice

Ecuaciones de campo libre:

	espacio de posición	espacio de momentum
Klein-Gordon	$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi = 0$	$[p^2 - m^2] \phi = 0$
Dirac	$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0$	$[\not{p} - m] \psi = 0$
Proca	$\partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + m^2 A^\nu = 0$	$[(-p^2 + m^2) g_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu] A^\nu = 0$

El propagador es el inverso del factor entre corchetes $([\dots]) \times i$:

Propagador de espín 0 : $\frac{i}{p^2 - m^2}$

Propagador de espín $\frac{1}{2}$: $\frac{i}{\not{p} - mc} = i \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2}$

Propagador de espín 1 : $\frac{-i}{p^2 - m^2} \left[g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{m^2} \right]$

Para hallar el **propagador del fotón (espín 1 no masivo)**, volvamos a la ecuación de Maxwell para campo libre:

$$\partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = 0 .$$

Usamos la **condición de Lorentz** para determinar A^μ , i.e.,

$$\partial_\mu A^\mu = 0 ,$$

con lo que la ecuación de campo se reduce a

$$\partial^2 A^\nu = 0 \xrightarrow{p_\mu \rightarrow i\partial_\mu} (-p^2 g_{\mu\nu}) A^\nu = 0 .$$

Entonces, el propagador del fotón es:

Propagador de espín 1, no masivo : $-i \frac{g_{\mu\nu}}{p^2}$

Para obtener los factores de vértice:

- Escribimos $i\mathcal{L}_{\text{int}}$ en el espacio de momentum
- Los campos involucrados determinan la estructura de la interacción

e.g., para QED,

$$i\mathcal{L}_{\text{int}} = -i (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) A_\mu$$

Tres campos involucrados ($\bar{\psi}$, ψ , A_μ): un fermión entrante, un fermión saliente y un fotón.

Para obtener el factor de vértice, “borramos” los campos:

$$-i\sqrt{4\pi}q\gamma^\mu \equiv ig_e\gamma^\mu$$

Para obtener los factores de vértice:

- Escribimos $i\mathcal{L}_{\text{int}}$ en el espacio de momentum
- Los campos involucrados determinan la estructura de la interacción

e.g., para QED,

$$i\mathcal{L}_{\text{int}} = -i (\bar{q}\psi\gamma^\mu\psi) A_\mu$$

Tres campos involucrados ($\bar{\psi}$, ψ , A_μ): un fermión entrante, un fermión saliente y un fotón.

Para obtener el factor de vértice, “borramos” los campos:

$$-i\sqrt{4\pi}q\gamma^\mu \equiv ig_e\gamma^\mu$$

Para obtener los factores de vértice:

- Escribimos $i\mathcal{L}_{\text{int}}$ en el espacio de momentum
- Los campos involucrados determinan la estructura de la interacción

e.g., para QED,

$$i\mathcal{L}_{\text{int}} = -i (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) A_\mu$$

Tres campos involucrados ($\bar{\psi}$, ψ , A_μ): un fermión entrante, un fermión saliente y un fotón.

$$\bar{\psi}$$

Para obtener el factor de vértice, “borramos” los campos:

$$\frac{ig_e \gamma^\mu}{-i\sqrt{4\pi} q \gamma^\mu} \equiv ig_e \gamma^\mu$$

$$\psi$$

Contenido

- 1 Introducción
- 2 Lagrangianos en teorías de campo relativistas
- 3 Invariancia gauge local
- 4 Reglas de Feynman
- 5 Rompimiento espontáneo de simetría y mecanismo de Higgs

El término de masa

La invariancia gauge local ...

- ▶ funciona para interacciones e.m. y fuertes (fotón y gluones no masivos)
- ▶ no se cumple para interacciones débiles (W^\pm y Z^0 masivos)

Problema: término de masa en $\mathcal{L}_{\text{Proca}}$ no es invariante –

$$\mathcal{L}_{\text{Proca}} = \frac{-1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{8\pi} m^2 A^\nu A_\nu$$

¿Podemos adaptar la invariancia gauge local para campos masivos?

Sí, usando ...

- ▶ rompimiento espontáneo de la simetría
- ▶ mecanismo de Higgs

Aprendamos primero a identificar el término de masa ▶

Consideremos el siguiente Lagrangiano para un escalar ϕ :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi) + e^{-(\alpha \phi)^2} \quad (\alpha \in \mathbb{R}) .$$

A primera vista, parece un campo no masivo.

Pero si expandimos ...

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi) + 1 - \alpha^2 \phi^2 + \frac{1}{2} \alpha^4 \phi^4 - \frac{1}{6} \alpha^6 \phi^6 + \dots$$

y comparamos con

$$\mathcal{L}_{\text{Klein-Gordon}} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 ,$$

vemos que el segundo término es un término de masa con

$$m = \sqrt{2} \alpha .$$

El término de masa puede estar “disfrazado”.

Para identificarlo, expandimos y buscamos el término de segundo orden en los campos (ϕ, ψ, A^μ , etc.).

Consideremos ahora

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi) + \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 - \frac{1}{4} \lambda^2 \phi^4 \quad (\mu, \lambda \in \mathbb{R})$$

parece un término de masa, pero tiene el signo equivocado ($|m|$ no puede ser imaginario!)

¿Qué hacer?

El cálculo de Feynman es un procedimiento perturbativo:

- ▶ partimos del estado base (el “vacío”) – la configuración de energía mínima
- ▶ tratamos a los campos como perturbaciones al estado base

Para los Lagrangianos previos, $\phi = 0$ ha sido el estado base.

Para el nuevo \mathcal{L} , no; hallaremos cuál es ▶

Escribamos

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U},$$

con

término “cinético” : $\mathcal{T} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$

término “potencial” : $\mathcal{U}(\phi) = -\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda^2\phi^4$

El mínimo de \mathcal{U} ocurre en

$$\phi = \pm \mu/\lambda.$$

Escribamos

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U},$$

con

término “cinético” : $\mathcal{T} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$

término “potencial” : $\mathcal{U}(\phi) = -\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda^2\phi^4$

El mínimo de \mathcal{U} ocurre en

$$\phi = \pm \mu/\lambda.$$

Desviación respecto del estado base:

$$\eta \equiv \phi \pm \mu/\lambda$$

En términos de η ,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta) (\partial^\mu \eta) - \mu^2 \eta^2 \pm \mu \lambda \eta^3 - \frac{1}{4} \lambda^2 \eta^4 + \frac{1}{4} \left(\mu^2 / \lambda\right)^2$$

Este es el mismo Lagrangiano, escrito en forma distinta.

El segundo término es ahora un término de masa con signo correcto, para

$$m = \sqrt{2}\mu$$

Desviación respecto del estado base:

$$\eta \equiv \phi \pm \mu/\lambda$$

En términos de η ,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta) (\partial^\mu \eta) - \mu^2 \eta^2 \pm \mu \lambda \eta^3 - \frac{1}{4} \lambda^2 \eta^4 + \frac{1}{4} \left(\mu^2 / \lambda \right)^2$$

Este es **el mismo Lagrangiano, escrito en forma distinta.**

El segundo término es ahora un término de masa con signo correcto, para

$$\mu \lambda \eta^3 \equiv m = \sqrt{\frac{1}{2} \lambda^2} \eta^4 \equiv$$

Rompimiento espontáneo de simetría

Para encontrar el término de masa:

- expresamos \mathcal{L} en función de la perturbación respecto del estado base
- al hacer esto, hemos “roto” una simetría discreta de \mathcal{L}

Forma original:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi) + \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 - \frac{1}{4} \lambda^2 \phi^4$$

→ invariante bajo $\phi \rightarrow -\phi$

Forma en términos de η :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta) (\partial^\mu \eta) - \mu^2 \eta^2 \pm \mu \lambda \eta^3 - \frac{1}{4} \lambda^2 \eta^4 + \frac{1}{4} \left(\mu^2 / \lambda \right)^2$$

→ no invariante bajo $\eta \rightarrow -\eta$

rompimiento espontáneo de simetría: el vacío elegido ($\phi = \mu/\lambda$) no tiene las mismas simetrías que \mathcal{L}

Veamos cómo se rompe espontáneamente una simetría continua.

Consideremos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_1) (\partial^\mu \phi_1) + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_2) (\partial^\mu \phi_2) + \frac{1}{2} \mu^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{1}{4} \lambda^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2)^2$$

Invariante ante rotaciones en el espacio ϕ_1, ϕ_2 , i.e., $SO(2)$ -simétrico.

Potencial:

$$\mathcal{U} = -\frac{1}{2} \mu^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2) + \frac{1}{4} \lambda^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2)^2$$

Los mínimos están sobre el círculo $\phi_{1\min}^2 + \phi_{2\min}^2 = \mu^2/\lambda^2$.

Escogemos un mínimo particular,

$$\phi_{1\min} = \mu/\lambda \quad , \quad \phi_{2\min} = 0 \quad ,$$

y definimos las fluctuaciones respecto de él:

$$\eta \equiv \phi_1 - \mu/\lambda \quad , \quad \xi \equiv \phi_2 \quad .$$

Con esto,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \eta) (\partial^\mu \eta) \quad -\mu^2 \eta^2 \right] + \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \xi) (\partial^\mu \xi) \right] \\ &\quad + \left[\mu \lambda (\eta^3 + \eta \xi^2) - \frac{\lambda^2}{4} (\eta^4 + \xi^4 + 2\eta^2 \xi^2) \right] + \mu^4 / (4\lambda^2) \quad . \end{aligned}$$

En esta forma, \mathcal{L} ya no es invariante bajo $SO(2)$.

η es ahora masivo: $m_\eta = \sqrt{2}\mu$

Aparece un escalar no masivo, ξ ($m_\xi = 0$).

Teorema de Goldstone:

El rompimiento espontáneo de una simetría continua global siempre está acompañado de la aparición de uno o más campos escalares (espín 0) no masivos (“bosones de Goldstone”).

Problema:

Los bosones escalares no masivos no existen en el conjunto de partículas elementales conocidas.

Solución:

El mecanismo de Higgs: rompimiento espontáneo de una simetría gauge local.

Teorema de Goldstone:

El rompimiento espontáneo de una simetría continua global siempre está acompañado de la aparición de uno o más campos escalares (espín 0) no masivos (“bosones de Goldstone”).

Problema:

Los bosones escalares no masivos no existen en el conjunto de partículas elementales conocidas.

Solución:

El mecanismo de Higgs: rompimiento espontáneo de una simetría gauge local.

Teorema de Goldstone:

El rompimiento espontáneo de una simetría continua global siempre está acompañado de la aparición de uno o más campos escalares (espín 0) no masivos (“bosones de Goldstone”).

Problema:

Los bosones escalares no masivos no existen en el conjunto de partículas elementales conocidas.

Solución:

El mecanismo de Higgs: rompimiento espontáneo de una simetría gauge local.

El mecanismo de Higgs

Escribamos

$$\phi \equiv \phi_1 + \phi_2 \Rightarrow \phi\phi^* = \phi_1^2 + \phi_2^2$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^* (\partial^\mu \phi) + \frac{1}{2} \mu^2 (\phi^* \phi) - \frac{1}{4} \lambda^2 (\phi^* \phi)^2$$

La simetría bajo $SO(2)$ se ha convertido en simetría bajo $U(1)$:

$$\phi \rightarrow e^{i\theta} \phi .$$

Para hacer a \mathcal{L} invariante bajo transformaciones gauge locales

$$\phi \rightarrow e^{i\theta(x)} \phi ,$$

introducimos el campo gauge A^μ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} [(\partial_\mu - iqA_\mu) \phi^*] [(\partial^\mu + iqA_\mu) \phi] \\ & + \frac{1}{2} \mu^2 (\phi^* \phi) - \frac{1}{4} \lambda^2 (\phi^* \phi)^2 - \frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} . \end{aligned}$$

Definimos los nuevos campos

$$\eta \equiv \phi_1 - \mu/\lambda \quad , \quad \xi \equiv \phi_2 \quad ,$$

con lo cual

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \eta) (\partial^\mu \eta) - \mu^2 \eta^2 \right] + \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \xi) (\partial^\mu \xi) \right] \\ & + \left[-\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} (q \frac{\mu}{\lambda})^2 A_\mu A^\mu \right] - 2i \left(\frac{\mu}{\lambda} q \right) (\partial_\mu \xi) A^\mu \\ & + \left\{ q [\eta (\partial_\mu \xi) - \xi (\partial_\mu \eta)] A^\mu + \frac{\mu}{\lambda} q^2 \eta (A_\mu A^\mu) + \frac{1}{2} q^2 (\xi^2 + \eta^2) (A_\mu A^\mu) \right. \\ & \quad \left. - \lambda \mu (\eta^3 + \eta \xi^2) - \frac{1}{4} \lambda^2 (\eta^4 + 2\eta^2 \xi^2 + \xi^4) \right\} + \left(\frac{\mu^2}{2\lambda} \right)^2 \end{aligned}$$

Escalar con masa $m_\eta = \sqrt{2}\mu$

Bosón de Goldstone

Campo gauge libre A^μ masivo: $m_A = 2\sqrt{\pi} (q\mu/\lambda)$ Acoplamientos entre A^μ, η, ξ

Rotemos ϕ :

$$\begin{aligned}\phi \rightarrow \phi' &= (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) (\phi_1 + \phi_2) \\ &= (\phi_1 \cos \theta - \phi_2 \operatorname{sen} \theta) + i(\phi_1 \operatorname{sen} \theta + \phi_2 \cos \theta)\end{aligned}$$

Si escogemos $\theta = -\arctan(\phi_2/\phi_1)$, entonces ϕ' será real, i.e., $\xi' = \phi'_2 = 0$.

En este gauge,

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \eta) (\partial^\mu \eta) - \mu^2 \eta^2 \right] + \left[-\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left(q \frac{\mu}{\lambda} \right)^2 A_\mu A^\mu \right] \\ & + \left\{ \frac{\mu}{\lambda} q^2 \eta (A_\mu A^\mu) + \frac{1}{2} q^2 \eta^2 (A_\mu A^\mu) - \lambda \mu \eta^3 - \frac{1}{4} \lambda^2 \eta^4 \right\} \\ & + \left(\frac{\mu^2}{2\lambda} \right)^2\end{aligned}$$

Eliminamos el bosón de Goldstone.

Nos quedamos con un escalar masivo η (el **bosón de Higgs**) y un campo gauge masivo $A^\mu \rightarrow$ **mecanismo de Higgs**

