Introducción a la física de partículas

Mauricio Bustamante

Grupo de Altas Energías, PUCP

I Escuela de Verano de Física
Universidad Nacional del Callao

27 y 28 de Enero del 2011

Contenido

1. Introducción: ¿qué es la física de partículas?
2. Cinemática relativista
3. Decaimientos y dispersiones
4. Una teoría juguete
5. Electrodinámica cuántica (QED)
6. Teorías gauge

Contenido

1 Introducción: ¿qué es la física de partículas?

2 Cinemática relativista

3 Decaimientos y dispersiones

4 Una teoría juguete

5 Electrodinámica cuántica (QED)

6 Teorías gauge

¿Qué es la física de partículas?

Es el estudio de los constituyentes fundamentales de la materia.

La pregunta "¿de qué está hecha la materia?" ha recibido variadas respuestas a lo largo de la historia:

- agua
- sólidos geométricos
- átomos
- electrones y núcleos atómicos
- electrones, protones y neutrones

Hoy creemos que, fundamentalmente, la materia está hecha de unas pocas clases de objetos (partículas) distintas.

Veamos . . . ▶

¿Qué es la física de partículas?

Es el estudio de los constituyentes fundamentales de la materia.

La pregunta "¿de qué está hecha la materia?" ha recibido variadas respuestas a lo largo de la historia:

- agua
- sólidos geométricos
- átomos
- electrones y núcleos atómicos
- electrones, protones y neutrones

Hoy creemos que, fundamentalmente, la materia está hecha de unas pocas clases de objetos (partículas) distintas.

Veamos . . . ▶

¿Qué es la física de partículas?

Es el estudio de los constituyentes fundamentales de la materia.

La pregunta "¿de qué está hecha la materia?" ha recibido variadas respuestas a lo largo de la historia:

- agua
- sólidos geométricos
- átomos
- electrones y núcleos atómicos
- electrones, protones y neutrones

Hoy creemos que, fundamentalmente, la materia está hecha de unas pocas clases de objetos (partículas) distintas.

Veamos . . . ▶

¿Qué es la física de partículas?

Es el estudio de los constituyentes fundamentales de la materia.

La pregunta "¿de qué está hecha la materia?" ha recibido variadas respuestas a lo largo de la historia:

- agua
- sólidos geométricos
- átomos
- electrones y núcleos atómicos
- electrones, protones y neutrones

Hoy creemos que, fundamentalmente, la materia está hecha de unas pocas clases de objetos (partículas) distintas.

Veamos . . . ▶

¿Qué es la física de partículas?

Es el estudio de los constituyentes fundamentales de la materia.

La pregunta "¿de qué está hecha la materia?" ha recibido variadas respuestas a lo largo de la historia:

- agua
- sólidos geométricos
- átomos
- electrones y núcleos atómicos
- electrones, protones y neutrones

Hoy creemos que, fundamentalmente, la materia está hecha de unas pocas clases de objetos (partículas) distintas.

Veamos . . . ▶

¿Qué es la física de partículas?

Es el estudio de los constituyentes fundamentales de la materia.

La pregunta "¿de qué está hecha la materia?" ha recibido variadas respuestas a lo largo de la historia:

- agua
- sólidos geométricos
- átomos
- electrones y núcleos atómicos
- electrones, protones y neutrones

Hoy creemos que, fundamentalmente, la materia está hecha de unas pocas clases de objetos (partículas) distintas.

Veamos . . . ▶

¿Qué es la física de partículas?

Es el estudio de los constituyentes fundamentales de la materia.

La pregunta "¿de qué está hecha la materia?" ha recibido variadas respuestas a lo largo de la historia:

- agua
- sólidos geométricos
- átomos
- electrones y núcleos atómicos
- electrones, protones y neutrones

Hoy creemos que, fundamentalmente, la materia está hecha de unas pocas clases de objetos (partículas) distintas.

Veamos ... ▶

¿Qué es la física de partículas?

Es el estudio de los constituyentes fundamentales de la materia.

La pregunta "¿de qué está hecha la materia?" ha recibido variadas respuestas a lo largo de la historia:

- agua
- sólidos geométricos
- átomos
- electrones y núcleos atómicos
- electrones, protones y neutrones

Hoy creemos que, fundamentalmente, la materia está hecha de unas pocas clases de objetos (partículas) distintas.

Veamos . . . ▶

¿Qué es la física de partículas?

Es el estudio de los constituyentes fundamentales de la materia.

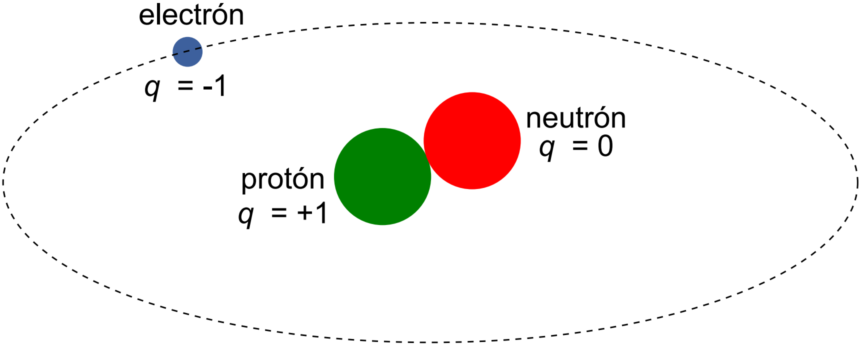
La pregunta "¿de qué está hecha la materia?" ha recibido variadas respuestas a lo largo de la historia:

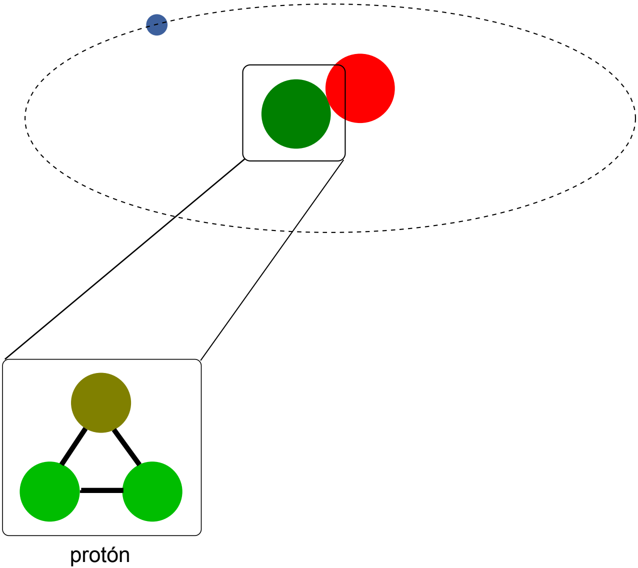
- agua
- sólidos geométricos
- átomos
- electrones y núcleos atómicos
- electrones, protones y neutrones

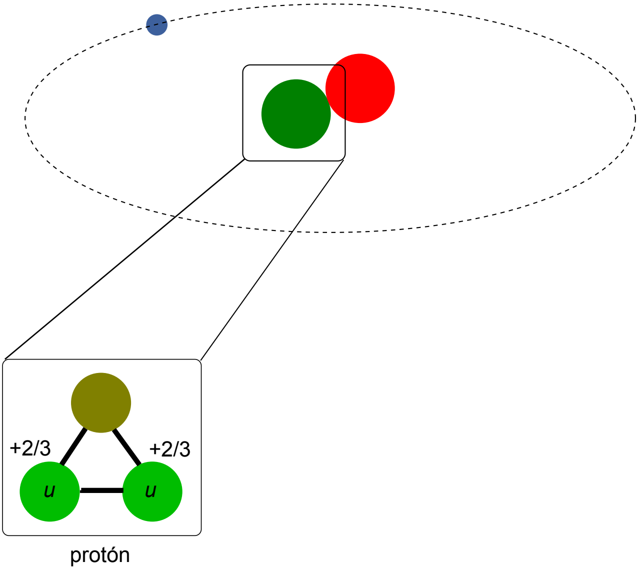
Hoy creemos que, fundamentalmente, la materia está hecha de unas pocas clases de objetos (partículas) distintas.

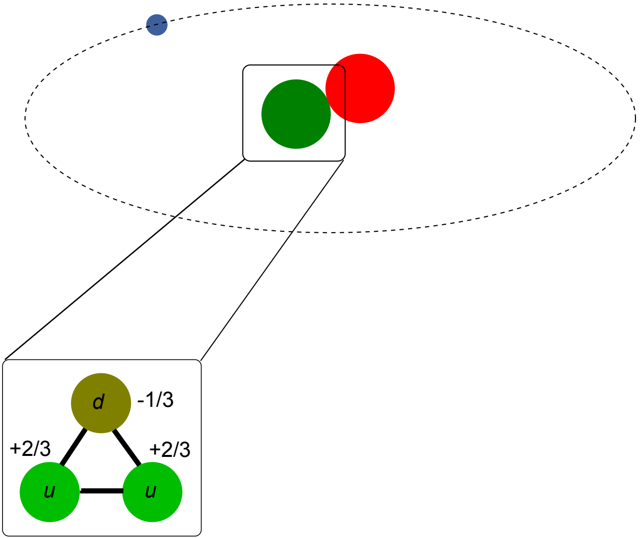
Veamos . . . ▶

Un átomo de ${}^{2}_{1}$H:

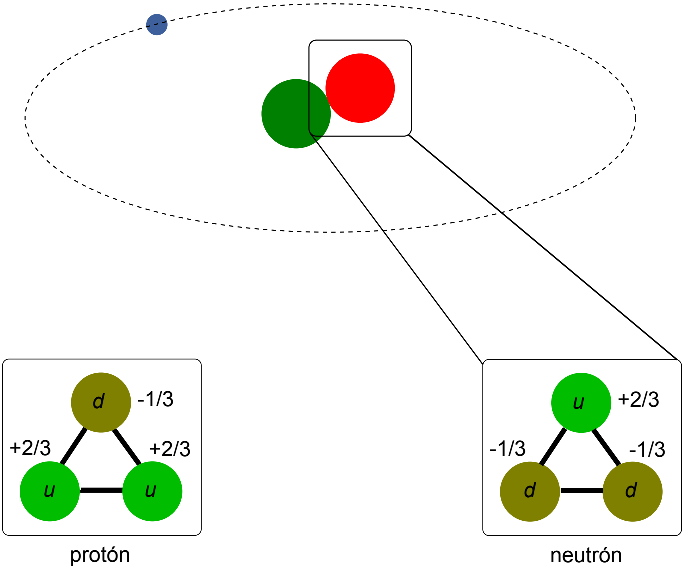


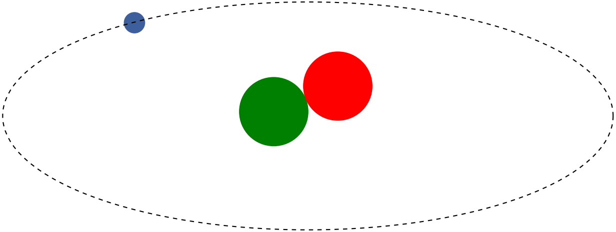

protón


+2/3
+2/3
u
u
protón



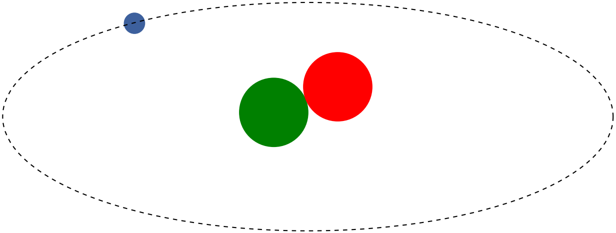
protón


d
-1/3
+2/3
+2/3
u
u
protón
u
+2/3
-1/3
-1/3
d
d
neutrón



Seis quarks, agrupados en tres familias:

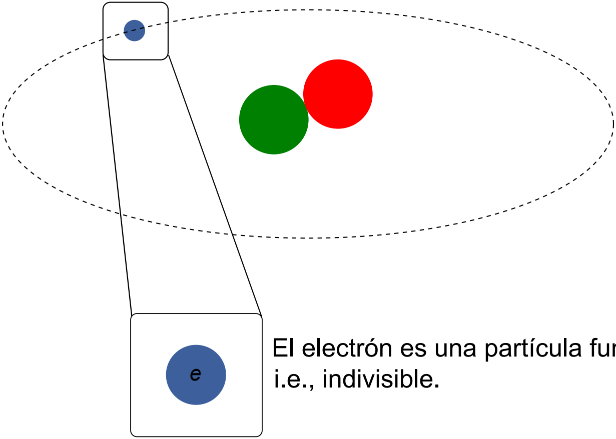
-1/3	*d* down	*s* strange	*b* bottom
+2/3	*u* up	*c* charm	*t* top



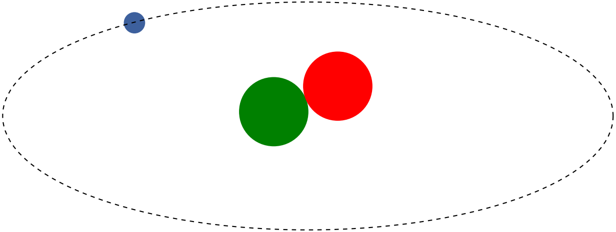
Seis quarks, agrupados en tres familias:

-1/3	*d* down	*s* strange	*b* bottom
+2/3	*u* up	*c* charm	*t* top

masa



El electrón es una partícula fundamental, i.e., indivisible.



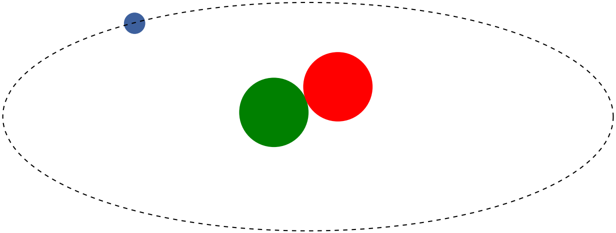
q = -1 e

electrón

q = 0 υ_e

neutrino-e

El electrón y el neutrino son *leptones*.



Los leptones están agrupados también en tres familias:

-1	e electrón	μ muón	τ tau
0	υ_e neutrino-e	υ_μ neutrino-μ	υ_τ neutrino-τ

$\longrightarrow$ masa

Hoy creemos que los constituyentes fundamentales son de tres tipos:

- quarks: forman protones (*uud*), neutrones (*ddu*), etc.
- leptones: notablemente, el electrón
- bosones: "transmisores de fuerza"

Cuatro tipos de interacción conocidos:

interacción	intensidad	bosón asociado
fuerte	10	gluones ($g_1, \ldots, g_8$)
electromagnética	10^{-2}	fotón (γ)
débil	10^{-13}	bosones débiles (W^+, W^-, Z^0)
gravitacional	10^{-42}	¿gravitón?

Excepto a energías muy altas ($\gtrsim 10^9$ J), la interacción gravitacional es despreciable.

Hoy creemos que los constituyentes fundamentales son de tres tipos:

- quarks: forman protones (*uud*), neutrones (*ddu*), etc.
- leptones: notablemente, el electrón
- bosones: "transmisores de fuerza"

Cuatro tipos de interacción conocidos:

interacción	intensidad	bosón asociado
fuerte	10	gluones ($g_1, \ldots, g_8$)
electromagnética	10^{-2}	fotón (γ)
débil	10^{-13}	bosones débiles (W^+, W^-, Z^0)
gravitacional	10^{-42}	¿gravitón?

Excepto a energías muy altas ($\gtrsim 10^9$ J), la interacción gravitacional es despreciable.

Hoy creemos que los constituyentes fundamentales son de tres tipos:

- quarks: forman protones (*uud*), neutrones (*ddu*), etc.
- leptones: notablemente, el electrón
- bosones: "transmisores de fuerza"

Cuatro tipos de interacción conocidos:

interacción	intensidad	bosón asociado
fuerte	10	gluones ($g_1, \ldots, g_8$)
electromagnética	10^{-2}	fotón (γ)
débil	10^{-13}	bosones débiles (W^+, W^-, Z^0)
gravitacional	10^{-42}	¿gravitón?

Excepto a energías muy altas ($\gtrsim 10^9$ J), la interacción gravitacional es despreciable.

Hoy creemos que los constituyentes fundamentales son de tres tipos:

- quarks: forman protones (*uud*), neutrones (*ddu*), etc.
- leptones: notablemente, el electrón
- bosones: “transmisores de fuerza”

Cuatro tipos de interacción conocidos:

interacción	intensidad	bosón asociado
fuerte	10	gluones ($g_1, \ldots, g_8$)
electromagnética	10^{-2}	fotón (γ)
débil	10^{-13}	bosones débiles (W^+, W^-, Z^0)
gravitacional	10^{-42}	¿gravitón?

Excepto a energías muy altas ($\gtrsim 10^9$ J), la interacción gravitacional es despreciable.

Hoy creemos que los constituyentes fundamentales son de tres tipos:

- quarks: forman protones (*uud*), neutrones (*ddu*), etc.
- leptones: notablemente, el electrón
- bosones: “transmisores de fuerza”

Cuatro tipos de interacción conocidos:

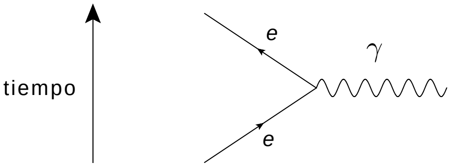
interacción	intensidad	bosón asociado
fuerte	10	gluones ($g_1, \ldots, g_8$)
electromagnética	10^{-2}	fotón (γ)
débil	10^{-13}	bosones débiles (W^+, W^-, Z^0)
gravitacional	10^{-42}	¿gravitón?

Excepto a energías muy altas ($\gtrsim 10^9$ J), la interacción gravitacional es despreciable.

Cada fuerza es mediada por el intercambio de un bosón.

Representación gráfica: diagramas de Feynman

e.g., para la interacción de un electrón con un fotón, dibujamos

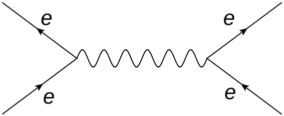


Este es el vértice primitivo para todas las interacciones electromagnéticas, i.e., que involucran fotones.

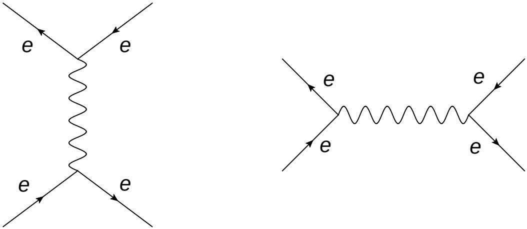
Electrodinámica cuántica (QED): teoría que describe las interacciones e.m. a partir del intercambio de fotones entre partículas cargadas.

Usando el vértice primitivo, construimos procesos e.m. más complejos:

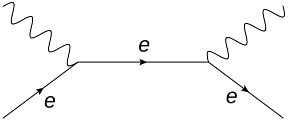
- dispersión de Møller ($e^- + e^- \to e^- + e^-$)



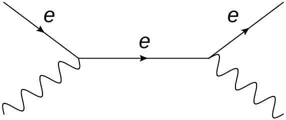
- dispersión de Bhabha ($e^- + e^+ \to e^- + e^+$)



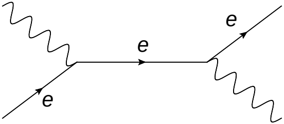
- aniquilación de pares ($e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma$)



- producción de pares ($\gamma + \gamma \rightarrow e^- + e^+$)

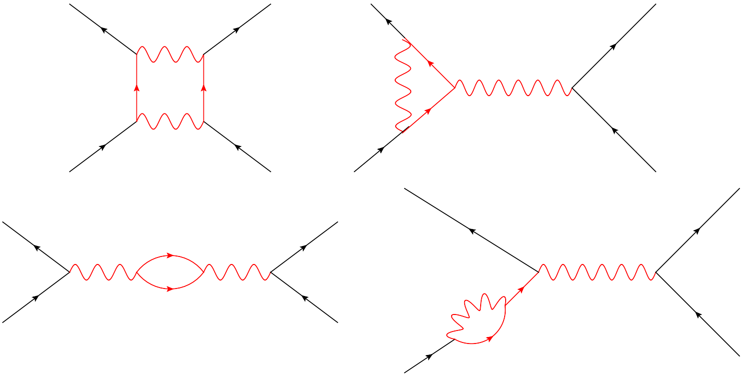


- dispersión de Compton ($e^- + \gamma \rightarrow e^- + \gamma$)



El número de vértices no está restringido a dos.

e.g., dispersión de Møller ($e^- + e^- \to e^- + e^-$) con cuatro vértices:



- líneas internas partículas no observadas – partículas virtuales
- líneas externas: partículas observables

Las líneas externas especifican qué proceso está ocurriendo; las internas describen el mecanismo responsable.

Los diagramas de Feynman son puramente simbólicos
– no representan trayectorias de partículas.

Cada diagrama representa un número, que se calcula usando las “reglas de Feynman”.

Para un proceso dado (e.g., $e^- + e^- \to e^- + e^-$):

- se dibujan todos los diagramas de Feynman, hasta cierto orden
- se evalúa cada uno usando las reglas de Feynman
- la suma total representa el proceso físico

Problema: ¿hasta qué orden de diagramas contar?

- en QED, cada vértice introduce un factor $\sqrt{\alpha} \approx \sqrt{1/137}$
- $\therefore$ diagramas con más vértices contribuyen menos

Los diagramas de Feynman son puramente simbólicos
– no representan trayectorias de partículas.

Cada diagrama representa un número, que se calcula usando las “reglas de Feynman”.

Para un proceso dado (e.g., $e^- + e^- \to e^- + e^-$):

- se dibujan todos los diagramas de Feynman, hasta cierto orden
- se evalúa cada uno usando las reglas de Feynman
- la suma total representa el proceso físico

Problema: ¿hasta qué orden de diagramas contar?

- en QED, cada vértice introduce un factor $\sqrt{\alpha} \approx \sqrt{1/137}$
- $\therefore$ diagramas con más vértices contribuyen menos

Los diagramas de Feynman son puramente simbólicos
– no representan trayectorias de partículas.

Cada diagrama representa un número, que se calcula usando las "reglas de Feynman".

Para un proceso dado (e.g., $e^- + e^- \to e^- + e^-$):

- se dibujan todos los diagramas de Feynman, hasta cierto orden
- se evalúa cada uno usando las reglas de Feynman
- la suma total representa el proceso físico

Problema: ¿hasta qué orden de diagramas contar?

- en QED, cada vértice introduce un factor $\sqrt{\alpha} \approx \sqrt{1/137}$
- $\therefore$ diagramas con más vértices contribuyen menos

Los diagramas de Feynman son puramente simbólicos
– no representan trayectorias de partículas.

Cada diagrama representa un número, que se calcula usando las "reglas de Feynman".

Para un proceso dado (e.g., $e^- + e^- \to e^- + e^-$):
- se dibujan todos los diagramas de Feynman, hasta cierto orden
- se evalúa cada uno usando las reglas de Feynman
- la suma total representa el proceso físico

Problema: ¿hasta qué orden de diagramas contar?

- en QED, cada vértice introduce un factor $\sqrt{\alpha} \approx \sqrt{1/137}$
- $\therefore$ diagramas con más vértices contribuyen menos

Los diagramas de Feynman son puramente simbólicos
– no representan trayectorias de partículas.

Cada diagrama representa un número, que se calcula usando las “reglas de Feynman”.

Para un proceso dado (e.g., $e^- + e^- \to e^- + e^-$):
- se dibujan todos los diagramas de Feynman, hasta cierto orden
- se evalúa cada uno usando las reglas de Feynman
- la suma total representa el proceso físico

Problema: ¿hasta qué orden de diagramas contar?

- en QED, cada vértice introduce un factor $\sqrt{\alpha} \approx \sqrt{1/137}$
- $\therefore$ diagramas con más vértices contribuyen menos

Los diagramas de Feynman son puramente simbólicos
– no representan trayectorias de partículas.

Cada diagrama representa un número, que se calcula usando las "reglas de Feynman".

Para un proceso dado (e.g., $e^- + e^- \to e^- + e^-$):
- se dibujan todos los diagramas de Feynman, hasta cierto orden
- se evalúa cada uno usando las reglas de Feynman
- la suma total representa el proceso físico

Problema: ¿hasta qué orden de diagramas contar?

- en QED, cada vértice introduce un factor $\sqrt{\alpha} \approx \sqrt{1/137}$
- $\therefore$ diagramas con más vértices contribuyen menos

Los diagramas de Feynman son puramente simbólicos
– no representan trayectorias de partículas.

Cada diagrama representa un número, que se calcula usando las "reglas de Feynman".

Para un proceso dado (e.g., $e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$):

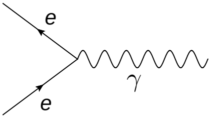
- se dibujan todos los diagramas de Feynman, hasta cierto orden
- se evalúa cada uno usando las reglas de Feynman
- la suma total representa el proceso físico

Problema: ¿hasta qué orden de diagramas contar?

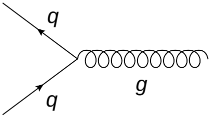
- en QED, cada vértice introduce un factor $\sqrt{\alpha} \approx \sqrt{1/137}$
- $\therefore$ diagramas con más vértices contribuyen menos

Vértices fundamentales para todas las fuerzas (excepto gravitación):

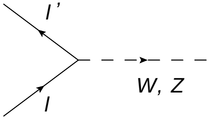
- electromagnética (electrodinámica cuántica):

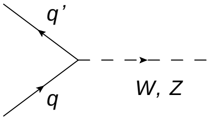


- fuerte (cromodinámica cuántica):



- débil (teoría Glashow-Salam-Weinberg):





Contenido

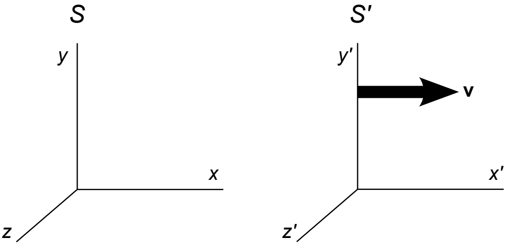
1. Introducción: ¿qué es la física de partículas?
2. Cinemática relativista
3. Decaimientos y dispersiones
4. Una teoría juguete
5. Electrodinámica cuántica (QED)
6. Teorías gauge

Relatividad especial:

las leyes de la física son igualmente válidas en todos los sistemas de referencia inerciales

Sistema inercial: uno donde la primera de ley de Newton se cumple

Cualesquiera dos sistemas inerciales se mueven a velocidad constante uno respecto al otro:



Transformaciones de Lorentz de S a S':

$$x' = \gamma\,(x - vt)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

$$\gamma \equiv (1-\beta)^{-1/2},\ \beta \equiv v/c$$

Algunas consecuencias:

- No simultaneidad: dos eventos que ocurren al mismo tiempo en S (i.e., $t_A = t_B$), pero en diferentes ubicaciones, no ocurren al mismo tiempo en S':

$$t'_A = t'_B + \frac{\gamma v}{c^2}(x_B - x_A) \ .$$

- Contracción de longitud: un objeto que en S' tiene longitud L' en la dirección de $x \| x'$ es medido en S con longitud

$$L = L'/\gamma < L' \ .$$

- Dilatación del tiempo: el intervalo de tiempo $\Delta t'$ en S' es medido en S como

$$\Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x'\right) > \Delta t' \ .$$

- Adición de velocidades: si un objeto se mueve con velocidad u' con respecto a S', entonces, con respecto a S, se mueve a velocidad

$$u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2} \ .$$

Cuadrivectores

Definimos

$$x^0 = ct \quad , \quad x^1 = x \quad , \quad x^2 = y \quad , \quad x^3 = z \quad ,$$

con lo que las transformaciones de Lorentz quedan

$$\begin{aligned} x^{0\prime} &= \gamma\left(x^0 - \beta x^1\right) \\ x^{1\prime} &= \gamma\left(x^1 - \beta x^0\right) \\ x^{2\prime} &= x^2 \\ x^{3\prime} &= x^3 \end{aligned}$$

suma sobre índices repetidos

Más compactamente,

$$x^{\mu\prime} = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} = \boxed{\Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}} \quad (\mu = 0, 1, 2, 3) \quad ,$$

con Λ^{μ}_{ν} elementos de la matriz de Lorentz

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Las componentes x^μ cambian bajo Lorentz, pero la combinación

$$I \equiv \left(x^0\right)^2 - \left(x^1\right)^2 - \left(x^2\right)^2 - \left(x^3\right)^2 = \left(x^{0\prime}\right)^2 - \left(x^{1\prime}\right)^2 - \left(x^{2\prime}\right)^2 - \left(x^{3\prime}\right)^2$$

permanece igual:

I es un invariante de Lorentz

Si introducimos la métrica

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ,$$

podemos escribir el invariante como

$$I = \sum_{\mu=0}^{3} \sum_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = g_{00} \left(x^0\right)^2 + g_{11} \left(x^1\right)^2 + g_{22} \left(x^2\right)^2 + g_{33} \left(x^3\right)^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \ .$$

Cuadrivector *contravariante*: x^μ
Cuadrivector *covariante*: $x_\mu \equiv g_{\mu\nu} x^\nu$

$$\Rightarrow \boxed{I = x_\mu x^\mu}$$

Definimos un cuadrivector general

$$a^\mu = \left(a^0, a^1, a^2, a^3\right) = \left(a^0, \vec{\mathbf{a}}\right)$$

como el objeto que transforma de igual manera que x^μ, i.e.,

$$a^{\mu'} = \Lambda^\mu_\nu a^\nu \ .$$

Se cumple:

$$a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu$$

$$a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu$$

El producto escalar de dos cuadrivectores:

$$a^\mu b_\mu = a_\mu b^\mu = a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3 = a^0 b^0 - \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}$$

es invariante de Lorentz.

Energía y momentum

Sean:

- tiempo medido en el laboratorio: t
- tiempo propio de la partícula: τ

$$\boxed{d\tau = \frac{dt}{\gamma}}$$

$d\vec{\mathbf{x}}$: distancia, medida en el laboratorio, recorrida por la partícula

Velocidad ...

- ... medida en el laboratorio: $\vec{\mathbf{v}} = d\vec{\mathbf{x}}/dt$
- ... "propia": $\vec{\eta} = d\vec{\mathbf{x}}/d\tau$

$$\boxed{\Rightarrow \vec{\eta} = \gamma \vec{\mathbf{v}}}$$

Cuadrivelocidad propia: $\eta^\mu = \dfrac{dx^\mu}{d\tau}$

$$\eta^0 = \frac{dx^0}{d\tau} = \frac{d\,(ct)}{(1/\gamma)\,dt} = \gamma c \Rightarrow \boxed{\eta^\mu = \gamma\left(c, \vec{\mathbf{v}}\right)}$$

Para un partícula de masa m, el cuadrimomentum se define como

$$p^\mu = m\eta^\mu \ ,$$

de forma que

$$\vec{\mathbf{p}} = \gamma m\vec{\mathbf{v}} \qquad \text{y} \qquad p^0 = \gamma mc \ .$$

Si definimos la “energía relativista” como

$$E = \gamma mc^2 \ ,$$

entonces, el cuadrivector de energía-momentum queda

$$\boxed{p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{\mathbf{p}}\right)} \ .$$

relación de energía-momentum: $p_\mu p^\mu = \dfrac{E^2}{c^2} - \left|\vec{\mathbf{p}}\right|^2 = m^2c^2$

$$E = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}m\frac{v^4}{c^2} + \ldots$$

Energía en reposo:

$$E\left(v = 0\right) = mc^2$$

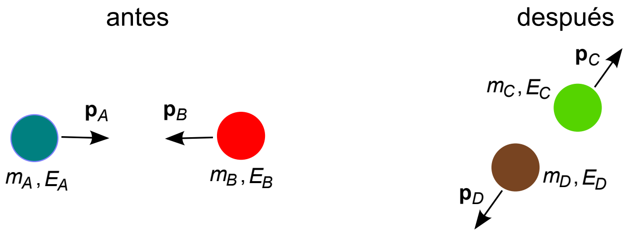
Energía cinética relativista:

$$T \equiv mc^2\left(\gamma - 1\right) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}m\frac{v^4}{c^2} + \ldots$$

En el límite no relativista ($v \ll c$),

$$T \rightarrow \frac{1}{2}mv^2 \;\; \text{(energía cinética clásica)}$$

Colisiones (e.g., $A + B \to C + D$)



Colisiones clásicas:

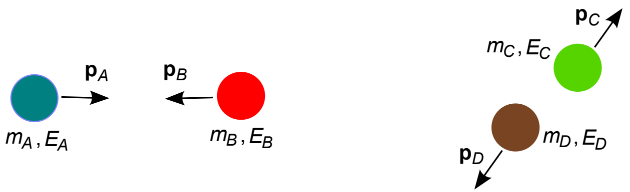
- se conserva la masa: $m_A + m_B = m_C + m_D$
- se conserva el momentum: $\vec{\mathbf{p}}_A + \vec{\mathbf{p}}_B = \vec{\mathbf{p}}_C + \vec{\mathbf{p}}_D$
- la energía cinética puede o no conservarse

Colisiones relativistas:

- se conserva la energía: $E_A + E_B = E_C + E_D$
- se conserva el momentum: $\vec{\mathbf{p}}_A + \vec{\mathbf{p}}_B = \vec{\mathbf{p}}_C + \vec{\mathbf{p}}_D$
- la energía cinética puede o no conservarse

$$\left.\begin{array}{l} E_A + E_B = E_C + E_D \\ \vec{\mathbf{p}}_A + \vec{\mathbf{p}}_B = \vec{\mathbf{p}}_C + \vec{\mathbf{p}}_D \end{array}\right\} \quad p_A + p_B = p_C + p_D$$

Colisiones (e.g., $A + B \to C + D$)



Colisiones clásicas:

- se conserva la masa: $m_A + m_B = m_C + m_D$
- se conserva el momentum: $\vec{\mathbf{p}}_A + \vec{\mathbf{p}}_B = \vec{\mathbf{p}}_C + \vec{\mathbf{p}}_D$
- la energía cinética puede o no conservarse

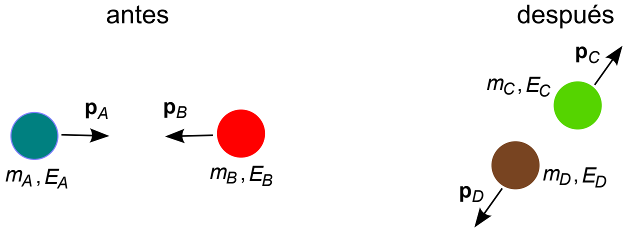
Colisiones relativistas:

- se conserva la energía: $E_A + E_B = E_C + E_D$
- se conserva el momentum: $\vec{\mathbf{p}}_A + \vec{\mathbf{p}}_B = \vec{\mathbf{p}}_C + \vec{\mathbf{p}}_D$

$$\left.\begin{array}{l} E_A + E_B = E_C + E_D \\ \vec{\mathbf{p}}_A + \vec{\mathbf{p}}_B = \vec{\mathbf{p}}_C + \vec{\mathbf{p}}_D \end{array}\right\} \; p_A + p_B = p_C + p_D$$

- la energía cinética puede o no conservarse

Colisiones (e.g., $A + B \to C + D$)



Colisiones clásicas:

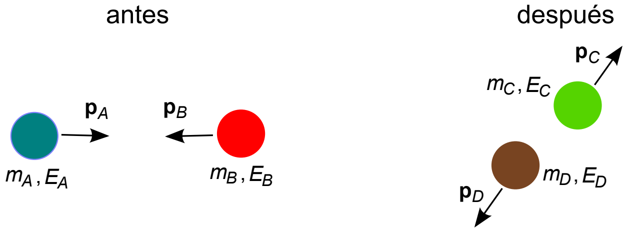
- se conserva la masa: $m_A + m_B = m_C + m_D$
- se conserva el momentum: $\vec{\mathbf{p}}_A + \vec{\mathbf{p}}_B = \vec{\mathbf{p}}_C + \vec{\mathbf{p}}_D$
- la energía cinética puede o no conservarse

Colisiones relativistas:

- se conserva la energía: $E_A + E_B = E_C + E_D$
- se conserva el momentum: $\vec{\mathbf{p}}_A + \vec{\mathbf{p}}_B = \vec{\mathbf{p}}_C + \vec{\mathbf{p}}_D$
- la energía cinética puede o no conservarse

$$\boxed{p_A + p_B = p_C + p_D}$$

Colisiones (e.g., $A + B \to C + D$)



Colisiones clásicas:

- se conserva la masa: $m_A + m_B = m_C + m_D$
- se conserva el momentum: $\vec{\mathbf{p}}_A + \vec{\mathbf{p}}_B = \vec{\mathbf{p}}_C + \vec{\mathbf{p}}_D$
- la energía cinética puede o no conservarse

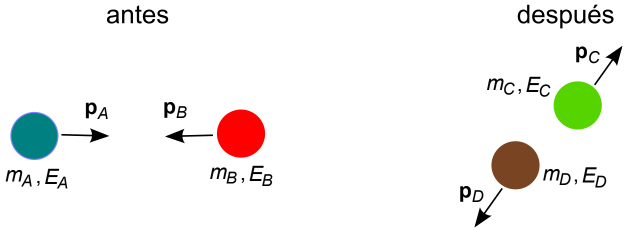
Colisiones relativistas:

- se conserva la energía: $E_A + E_B = E_C + E_D$
- se conserva el momentum: $\vec{\mathbf{p}}_A + \vec{\mathbf{p}}_B = \vec{\mathbf{p}}_C + \vec{\mathbf{p}}_D$

$$p_A + p_B = p_C + p_D$$

- la energía cinética puede o no conservarse

Colisiones (e.g., $A + B \to C + D$)



Colisiones clásicas:

- se conserva la masa: $m_A + m_B = m_C + m_D$
- se conserva el momentum: $\vec{\mathbf{p}}_A + \vec{\mathbf{p}}_B = \vec{\mathbf{p}}_C + \vec{\mathbf{p}}_D$
- la energía cinética puede o no conservarse

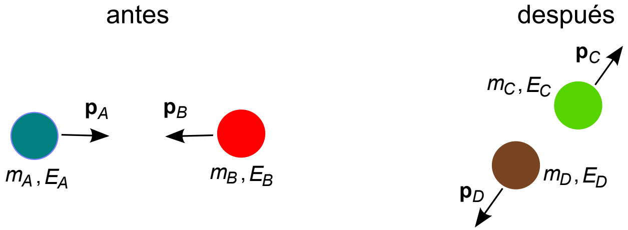
Colisiones relativistas:

- se conserva la energía: $E_A + E_B = E_C + E_D$
- se conserva el momentum: $\vec{\mathbf{p}}_A + \vec{\mathbf{p}}_B = \vec{\mathbf{p}}_C + \vec{\mathbf{p}}_D$

$\Bigg\}\ p_A + p_B = p_C + p_D$

- la energía cinética puede o no conservarse

Colisiones (e.g., $A + B \rightarrow C + D$)



Colisiones clásicas:

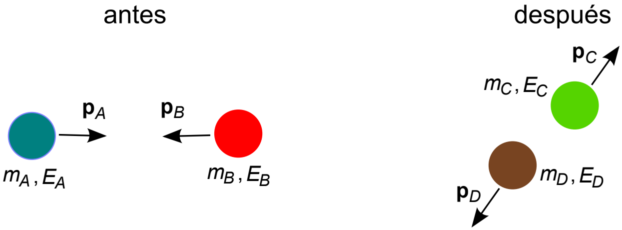
- se conserva la masa: $m_A + m_B = m_C + m_D$
- se conserva el momentum: $\vec{\mathbf{p}}_A + \vec{\mathbf{p}}_B = \vec{\mathbf{p}}_C + \vec{\mathbf{p}}_D$
- la energía cinética puede o no conservarse

Colisiones relativistas:

- se conserva la energía: $E_A + E_B = E_C + E_D$
- se conserva el momentum: $\vec{\mathbf{p}}_A + \vec{\mathbf{p}}_B = \vec{\mathbf{p}}_C + \vec{\mathbf{p}}_D$
- la energía cinética puede o no conservarse

$$\left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} p_A + p_B = p_C + p_D$$

Colisiones (e.g., $A + B \to C + D$)



Colisiones clásicas:

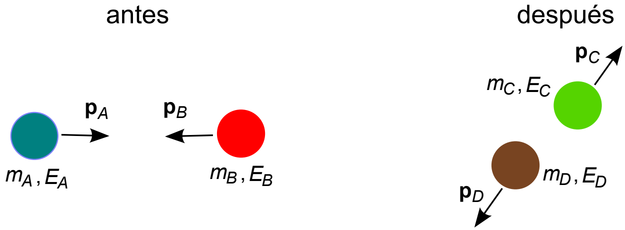
- se conserva la masa: $m_A + m_B = m_C + m_D$
- se conserva el momentum: $\vec{\mathbf{p}}_A + \vec{\mathbf{p}}_B = \vec{\mathbf{p}}_C + \vec{\mathbf{p}}_D$
- la energía cinética puede o no conservarse

Colisiones relativistas:

- se conserva la energía: $E_A + E_B = E_C + E_D$
- se conserva el momentum: $\vec{\mathbf{p}}_A + \vec{\mathbf{p}}_B = \vec{\mathbf{p}}_C + \vec{\mathbf{p}}_D$
- la energía cinética puede o no conservarse

$$p_A + p_B = p_C + p_D$$

Colisiones (e.g., $A + B \to C + D$)



Colisiones clásicas:

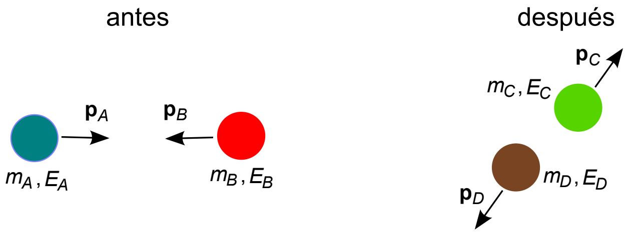
- se conserva la masa: $m_A + m_B = m_C + m_D$
- se conserva el momentum: $\vec{\mathbf{p}}_A + \vec{\mathbf{p}}_B = \vec{\mathbf{p}}_C + \vec{\mathbf{p}}_D$
- la energía cinética puede o no conservarse

Colisiones relativistas:

- se conserva la energía: $E_A + E_B = E_C + E_D$
- se conserva el momentum: $\vec{\mathbf{p}}_A + \vec{\mathbf{p}}_B = \vec{\mathbf{p}}_C + \vec{\mathbf{p}}_D$
- la energía cinética puede o no conservarse

$p_A + p_B = p_C + p_D$

Colisiones (e.g., $A + B \to C + D$)



Colisiones clásicas:

- se conserva la masa: $m_A + m_B = m_C + m_D$
- se conserva el momentum: $\vec{\mathbf{p}}_A + \vec{\mathbf{p}}_B = \vec{\mathbf{p}}_C + \vec{\mathbf{p}}_D$
- la energía cinética puede o no conservarse

Colisiones relativistas:

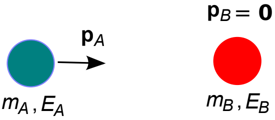
- se conserva la energía: $E_A + E_B = E_C + E_D$
- se conserva el momentum: $\vec{\mathbf{p}}_A + \vec{\mathbf{p}}_B = \vec{\mathbf{p}}_C + \vec{\mathbf{p}}_D$

$$\boxed{p_A + p_B = p_C + p_D}$$

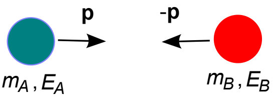
- la energía cinética puede o no conservarse

Al calcular, trabajamos principalmente en dos sistemas de referencia:

- sistema laboratorio



- sistema centro de momento (CM)



$$\vec{\mathbf{p}}_A + \vec{\mathbf{p}}_B = \vec{\mathbf{0}} = \sum_{i=C,D,\ldots} \vec{\mathbf{p}}_i$$

Dependiendo de la situación particular, conviene usar uno, el otro, o ambos.

Ejemplo: velocidad de productos de decaimiento

Una partícula de masa M, inicialmente en reposo, decae en dos pedazos, cada uno de masa m. ¿Cuál es la velocidad de cada pedazo producido?

Cuadrimomentos:

$$p_M = \left(E_M/c, \vec{\mathbf{0}}\right) = \left(Mc, \vec{\mathbf{0}}\right) \quad , \quad p_1 = (E_1/c, \vec{\mathbf{p}}_1) \quad , \quad p_2 = (E_2/c, \vec{\mathbf{p}}_2)$$

$$p_M = p_1 + p_2 \Rightarrow \begin{cases} E_M = E_1 + E_2 \\ \vec{\mathbf{0}} = \vec{\mathbf{p}}_1 + \vec{\mathbf{p}}_2 \Rightarrow \vec{\mathbf{p}}_1 = -\vec{\mathbf{p}}_2 \equiv \vec{\mathbf{p}} \end{cases}$$

Usando la relación de energía-momentum $E^2 = \left|\vec{\mathbf{p}}\right|^2 c^2 + m^2 c^4$, obtenemos

$$E_1 = E_2 = \sqrt{\left|\vec{\mathbf{p}}\right|^2 c^2 + m^2 c^4} \, .$$

De la conservación de energía,

$$E_M = E_1 + E_2 \Rightarrow M = \frac{2m}{1 - v^2/c^2} \, ,$$

donde hemos usado $\left|\vec{\mathbf{p}}\right| = \gamma m v$. Con esto,

$$\boxed{v = c\sqrt{1 - (2m/M)^2}} \, .$$

Ejemplo: decaimiento del pión

Un pión en reposo decae en un muón más un neutrino ($\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu$). ¿Cuál es la velocidad del muón? Asumir que el neutrino no tiene masa.

$$p_\pi = (E_\pi/c, \vec{\mathbf{p}}_\pi) = \left(m_\pi c, \vec{\mathbf{0}}\right) \quad , \quad p_\mu = (E_\mu/c, \vec{\mathbf{p}}_\mu) \quad , \quad p_\nu = (E_\nu/c, \vec{\mathbf{p}}_\nu)$$

$$p_\pi = p_\mu + p_\nu \Rightarrow p_\nu = p_\pi - p_\mu \Rightarrow p_\nu^2 = (p_\pi - p_\mu)^2 = p_\pi^2 + p_\mu^2 - 2p_\pi \cdot p_\mu$$

Pero

$$p_\nu^2 = 0 \quad , \quad p_\pi^2 = m_\pi^2 c^2 \quad , \quad p_\mu^2 = m_\mu^2 c^2 \quad , \quad p_\pi \cdot p_\mu = \frac{E_\pi}{c}\frac{E_\nu}{c} = m_\pi E_\mu \quad ,$$

con lo cual

$$0 = m_\pi^2 c^2 + m_\mu^2 c^2 - 2m_\pi E_\mu \Rightarrow \boxed{E_\mu = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi} c^2} \; .$$

Por otro lado,

$$p_\mu = p_\pi - p_\nu \Rightarrow p_\mu^2 = (p_\pi - p_\nu)^2 \Rightarrow m_\mu^2 c^2 = m_\pi^2 c^2 - 2m_\pi E_\nu \; .$$

Como $E_\nu = \left|\vec{\mathbf{p}}_\nu\right| c = \left|\vec{\mathbf{p}}_\mu\right| c$, entonces

$$2m_\pi \left|\vec{\mathbf{p}}_\mu\right| = \left(m_\pi^2 - m_\mu^2\right) c \Rightarrow \boxed{\left|\vec{\mathbf{p}}_\mu\right| = \frac{\left(m_\pi^2 - m_\mu^2\right)}{2m_\pi} c} \; .$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_\mu = \gamma m_\mu c^2 \\ \left|\vec{\mathbf{p}}_\mu\right| = \gamma m_\mu v_\mu \end{array} \right. \quad \Rightarrow \boxed{v_\mu = \frac{\left|\vec{\mathbf{p}}_\mu\right|}{E_\mu} c^2 = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{m_\pi^2 + m_\mu^2} c \approx 0.271c} \; .$$

Contenido

1. Introducción: ¿qué es la física de partículas?
2. Cinemática relativista
3. Decaimientos y dispersiones
4. Una teoría juguete
5. Electrodinámica cuántica (QED)
6. Teorías gauge

Tiempo de vida

... decaen en ...

partículas inestables (e.g., muón, tau, neutrón) $\longrightarrow$ partículas estables (e.g., electrón, protón)

tiempo de vida:
tiempo transcurrido entre la creación de la partícula y su decaimiento

- consideramos a la partícula en reposo

– una partícula en movimiento dura más (desde nuestra perspectiva) debido a la dilatación del tiempo

- el decaimiento es aleatorio

– no todos las partículas en reposo decaen en el mismo tiempo tasa de decaimiento, Γ: probabilidad por unidad de tiempo de que una partícula decaiga

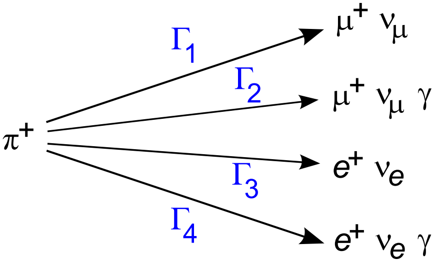
$N(t)$: número de partículas al tiempo t

En el intervalo dt, el número de partículas disminuye en $dN = -\Gamma N dt$. Resolviendo,

$$\boxed{N(t) = N(0)\, e^{-\Gamma t}} \;.$$

Tiempo de vida promedio:

$$\boxed{\tau = \frac{1}{\Gamma}}$$



Tasa de decaimiento total:

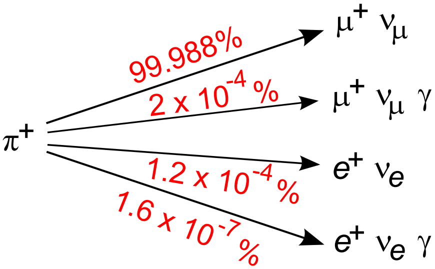
$$\Gamma_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^{n} \Gamma_i$$

Tiempo de vida:

$$\tau = 1/\Gamma_{\text{tot}}$$

Branching ratios:

$$\text{BR}_i = \Gamma_i/\Gamma_{\text{tot}}$$



Tasa de decaimiento total:

$$\Gamma_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^{n} \Gamma_i$$

Tiempo de vida:

$$\tau = 1/\Gamma_{\text{tot}}$$

Branching ratios:

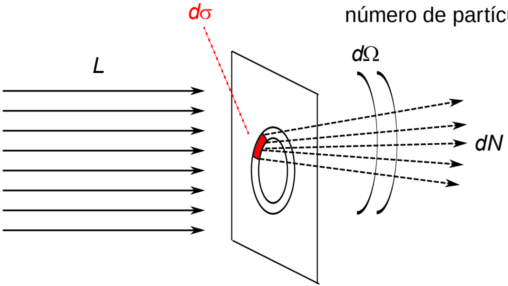
$$\text{BR}_i = \Gamma_i/\Gamma_{\text{tot}}$$

Sección de choque

La sección de choque, σ, es una medida de la probabilidad de que dos partículas interactúen para producir una reacción particular.

Depende de:

- cuáles son las partículas iniciales (e.g., LEP vs. LHC)
- cuáles son sus energías (usualmente, σ crece con E)
- a través de qué fuerzas pueden interactuar
- qué partículas se generan en la reacción



luminosidad (cm^{-2} s^{-1})

número de partículas dispersadas (s^{-1})

$$\boxed{dN} = \boxed{L}\, d\sigma = L \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{L}\frac{dN}{d\Omega}}$$

$[\sigma]$ = cm^2

Regla de oro de Fermi

En el cálculo de Γ ó σ, tenemos dos ingredientes:

- la amplitud del proceso, $\mathcal{M}$; y
- el espacio de fase disponible

$\mathcal{M}$ contiene toda la información dinámica
– la calculamos evaluando los diagramas de Feynman relevantes usando las "reglas de Feynman"

El espacio de fase contiene sólo información cinemática
– depende de las masas, energías y momentos de las partículas

Regla de oro de Fermi:

$$\text{tasa de transición} = \frac{2\pi}{\hbar}\,|\mathcal{M}|^2 \times (\text{espacio de fase})$$

Regla de oro de Fermi

En el cálculo de Γ ó σ, tenemos dos ingredientes:

- la amplitud del proceso, $\mathcal{M}$; y
- el espacio de fase disponible

$\mathcal{M}$ contiene toda la información dinámica
– la calculamos evaluando los diagramas de Feynman relevantes usando las “reglas de Feynman”

El espacio de fase contiene sólo información cinemática
– depende de las masas, energías y momentos de las partículas

Regla de oro de Fermi:

$$\text{tasa de transición} = \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{M}|^2 \times (\text{espacio de fase})$$

Regla de oro de Fermi

En el cálculo de Γ ó σ, tenemos dos ingredientes:

- la amplitud del proceso, $\mathcal{M}$; y
- el espacio de fase disponible

$\mathcal{M}$ contiene toda la información dinámica
– la calculamos evaluando los diagramas de Feynman relevantes usando las “reglas de Feynman”

El espacio de fase contiene sólo información cinemática
– depende de las masas, energías y momentos de las partículas

Regla de oro de Fermi:

$$\boxed{\text{tasa de transición} = \frac{2\pi}{\hbar}\,|\mathcal{M}|^2 \times (\text{espacio de fase})}$$

Regla de oro para decaimientos

Supongamos que la partícula 1 decae según:

$$1 \to 2 + 3 + 4 + \ldots + n \, .$$

La tasa de decaimiento está dada por:

$$d\Gamma = |\mathcal{M}|^2 \frac{S}{2\hbar m_1} \left[\left(\frac{c d^3 p_2}{(2\pi)^3 \, 2E_2} \right) \left(\frac{c d^3 p_3}{(2\pi)^3 \, 2E_3} \right) \cdots \left(\frac{c d^3 p_n}{(2\pi)^3 \, 2E_n} \right) \right] \\ \times (2\pi)^4 \, \delta^{(4)} \left(p_1 - p_2 - p_3 - \ldots - p_n \right)$$

- $p_i = \left(E_i / c, \vec{\mathbf{p}}_i \right)$: cuadrimomentum de la i-ésima partícula
- la función δ fuerza la conservación de energía y momentum
- la partícula 1 está en reposo, i.e., $p_1 = \left(m_1 c, \vec{\mathbf{0}} \right)$
- S es el producto de factores estadísticos – $1/j!$ por cada grupo de j partículas idénticas finales

Decaimiento a dos cuerpos:

$$1 \to 2 + 3$$

Tasa de decaimiento total:

$$\Gamma = \frac{S}{\hbar m_1} \left(\frac{c}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{|\mathcal{M}|^2}{E_2 E_3} \delta^{(4)} \left(p_1 - p_2 - p_3 \right) d^3 p_2 d^3 p_3$$

Después de un poco de álgebra (ver, e.g., Griffiths 1987), obtenemos

$$\boxed{\Gamma = \frac{S \left| \vec{\mathbf{p}} \right|}{8\pi\hbar m_1^2 c} \left| \mathcal{M} \right|^2}$$

$\left| \vec{\mathbf{p}} \right| = \left| \vec{\mathbf{p}}_2 \right| = \left| \vec{\mathbf{p}}_3 \right|$, dado por

$$\left| \vec{\mathbf{p}} \right| = \frac{c}{2m_1} \sqrt{m_1^4 + m_2^4 + m_3^4 - 2m_1^2 m_2^2 - 2m_1^2 m_3^2 - 2m_2^2 m_3^2}$$

Regla de oro para dispersiones

Supongamos que las partículas 1 y 2 colisionan, produciendo $3, 4, \ldots, n$:

$$1 + 2 \to 3 + 4 + \ldots + n$$

La sección de choque está dada por

$$d\sigma = |\mathcal{M}|^2 \frac{\hbar^2 S}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2 c^2)^2}} \left[\left(\frac{c d^3 p_3}{(2\pi)^3 \, 2E_3} \right) \left(\frac{c d^3 p_4}{(2\pi)^3 \, 2E_4} \right) \cdots \left(\frac{c d^3 p_n}{(2\pi)^3 \, 2E_n} \right) \right]$$
$$\times (2\pi)^4 \, \delta^{(4)} (p_1 + p_2 - p_3 - p_4 - \ldots - p_n)$$

- el momentum de la partícula i está entre $\vec{\mathbf{p}}_i$ y $\vec{\mathbf{p}}_i + d\vec{\mathbf{p}}_i$
- usualmente, nos interesa sólo el ángulo de salida de, e.g., la partícula 3
  – integramos en $(\vec{\mathbf{p}}_4, \vec{\mathbf{p}}_5, \ldots, \vec{\mathbf{p}}_n)$ y en $|\vec{\mathbf{p}}_3|$
- lo que resta es $d\sigma/d\Omega$
  – la sección de choque diferencial para la dispersión de 3 en un ángulo sólido $d\Omega$

Dispersión de dos cuerpos:

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4$$

De la regla de oro,

$$d\sigma = |\mathcal{M}|^2 \frac{\hbar^2 S}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2 c^2)^2}} \left(\frac{c d^3 p_3}{(2\pi)^3 \, 2E_3}\right) \left(\frac{c d^3 p_4}{(2\pi)^3 \, 2E_4}\right)$$
$$\times (2\pi)^4 \, \delta^{(4)} (p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \quad ,$$

tras un poco de álgebra (Griffiths 1987), obtenemos

$$\boxed{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\mathrm{CM}} = \left(\frac{\hbar c}{8\pi}\right)^2 \frac{S \, |\mathcal{M}|^2}{(E_1 + E_2)^2} \frac{|\vec{\mathbf{p}}_f|}{|\vec{\mathbf{p}}_i|}} \; ,$$

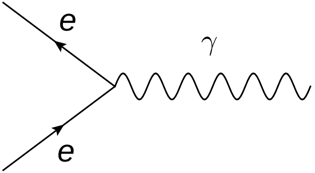
con $|\vec{\mathbf{p}}_f| = |\vec{\mathbf{p}}_3|$ ó $|\vec{\mathbf{p}}_4|$ y $|\vec{\mathbf{p}}_i| = |\vec{\mathbf{p}}_1|$ ó $|\vec{\mathbf{p}}_2|$.

Contenido

1. Introducción: ¿qué es la física de partículas?
2. Cinemática relativista
3. Decaimientos y dispersiones
4. Una teoría juguete
5. Electrodinámica cuántica (QED)
6. Teorías gauge

Tenemos expresiones para las tasas de decaimiento y las secciones de choque en términos de la amplitud $|\mathcal{M}|$ – introduciremos ahora las "reglas de Feynman" para calcular la amplitud.

En una dispersión real electrón-fotón,



,

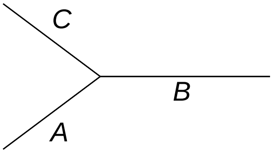
tenemos la complicación de que el electrón tiene espín $1/2$ y el fotón, espín 1.

Para introducir las reglas de Feynman, usaremos una teoría juguete de partículas sin espín.

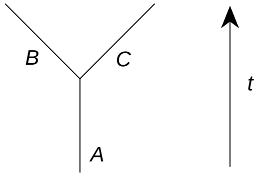
Imaginemos un mundo con sólo tres tipos de partículas – A, B y C.

- masas m_A, m_B, m_C, con $m_A > m_B + m_C$
- espín 0
- partículas = antipartículas

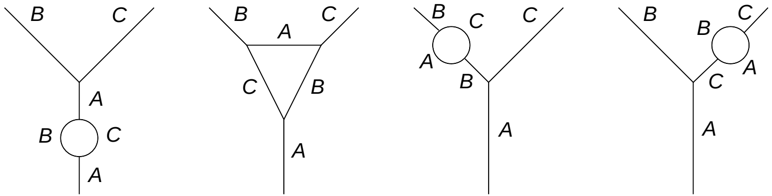
Vértice fundamental:



Como $m_A > m_B + m_C$, A puede decaer en $B + C$. A más bajo orden,



Existen correcciones de mayor orden, e.g., de orden tres:

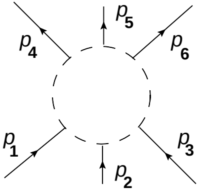


Cada vértice contribuye un factor multiplicativo $g < 1$ al cómputo de $\mathcal{M}$.

$\therefore$ los diagramas de orden más alto contribuyen menos

Reglas de Feynman para la teoría *ABC*

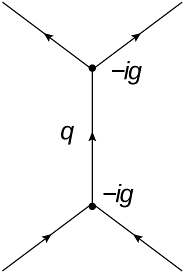
1. **Notación.** Etiquetar los momentos entrantes y salientes $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Etiquetar los momentos internos $q_1, q_2, \ldots$. Las flechas apuntan en la dirección del momentum de la partícula (entrante/saliente).



2. **Constante de acoplamiento.** Por cada vértice, escribir un factor de

$$-ig \quad .$$

g es la constante de acoplamiento; especifica la intensidad de la interacción entre A, B y C.

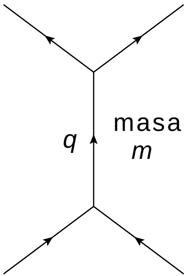


$$\sim (-ig)^2$$

3. **Propagador.** Por cada línea interna, escribir un factor

$$\frac{i}{q_j^2 - m_j^2 c^2} \ ,$$

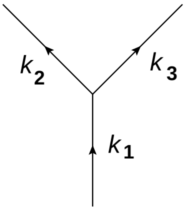
Las líneas internas representan partículas virtuales, indetectables, que no satisface la relación energía-momentum, i.e., $q_j^2 \neq m_j^2 c^2$).



4. **Conservación de energía y momentum.** Por cada vértice, escribir una función delta de la forma

$$(2\pi)^4 \, \delta^{(4)} \left(k_1 - k_2 - k_3 \right) \ ,$$

donde los los k_i son cuadrimomentos que *entran* al vértice (si es saliente, entonces agregar un signo menos).



5. **Integración sobre momentos internos.** Por cada línea interna, escribir un factor

$$\frac{1}{(2\pi)^4}\, d^4 q_j$$

e integrar sobre todos los momentos internos.

6. **Cancelar la función delta.** El resultado incluirá una función delta

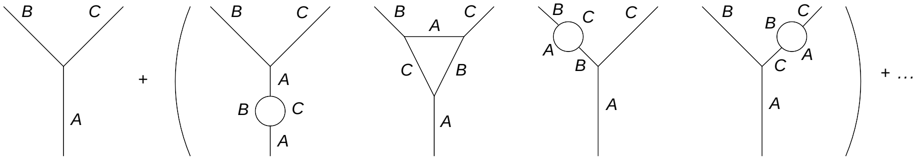
$$(2\pi)^4\, \delta^{(4)}\, (p_1 + p_2 + \ldots - p_n)$$

que asegura la conservación global de energía y momentum. Eliminarla; lo que queda es $-i\mathcal{M}$.

$\mathcal{M}$ es siempre invariante de Lorentz

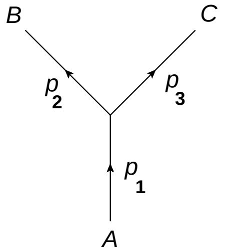
Tiempo de vida de A

El decaimiento $A \to B + C$ recibe contribuciones de varios órdenes:



Los diagramas de orden n contribuyen términos de orden $(-ig)^n$.

Asumiendo $g < 1$, nos quedamos con la contribución principal: el diagrama de primer orden.



No hay líneas internas.

Un ́vertice: $-ig\,(2\pi)^4\,\delta^{(4)}\,(p_1 - p_2 - p_3)$

Eliminamos la función delta (regla 6) y obtenemos $-i\mathcal{M} = -ig$, ó

$$\boxed{\mathcal{M} = g}\ .$$

Tasa de decaimiento a dos cuerpos:

$$\Gamma = \frac{S\,|\vec{\mathbf{p}}|}{8\pi\hbar m_1^2 c}\,|\mathcal{M}|^2 = \frac{g^2\,|\vec{\mathbf{p}}|}{8\pi\hbar m_A^2 c}$$

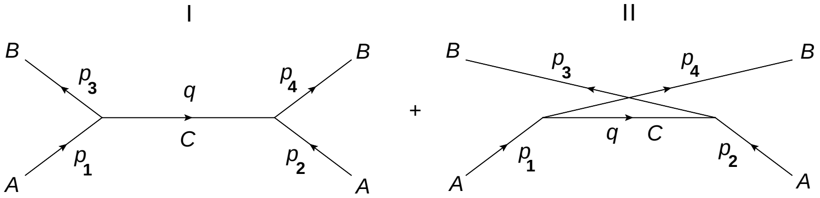
$$|\vec{\mathbf{p}}| = \frac{c}{2m_A}\sqrt{m_A^4 + m_B^4 + m_C^4 - 2m_A^2 m_B^2 - 2m_A^2 m_C^2 - 2m_B^2 m_C^2}$$

Tiempo de vida de A:

$$\boxed{\tau = \frac{1}{\Gamma} = \frac{8\pi\hbar m_A^2 c}{g^2\,|\vec{\mathbf{p}}|}}\ .$$

Dispersión $A + A \to B + B$

A orden más bajo (dos vértices), contribuyen dos diagramas:



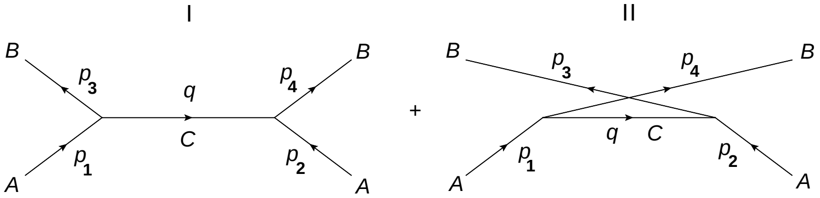
Calculemos primero el diagrama I:

- dos vértices: $(-ig)^2$
- un propagador: $\dfrac{i}{q^2 - m_C^2 c^2}$
- dos funciones delta: $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 - p_3 - q)$ y $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_2 + q - p_4)$
- una integración: $d^4q / (2\pi)^4$

$$
\begin{aligned}
&-i\mathcal{M}_{\mathrm{I}}\,(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \\
&\quad = -i\,(2\pi)^4 g^2 \int \frac{1}{q^2 - m_C^2 c^2} \delta^{(4)}(p_1 - p_3 - q)\, \delta^{(4)}(p_2 + q - p_4)\; d^4q
\end{aligned}
$$

Dispersión $A + A \to B + B$

A orden más bajo (dos vértices), contribuyen dos diagramas:



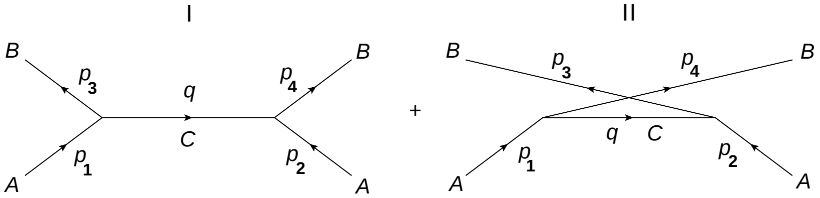
Calculemos primero el diagrama I:

- dos vértices: $(-ig)^2$
- un propagador: $\dfrac{i}{q^2 - m_C^2 c^2}$
- dos funciones delta: $(2\pi)^4 \, \delta^{(4)}(p_1 - p_3 - q)$ y $(2\pi)^4 \, \delta^{(4)}(p_2 + q - p_4)$
- una integración: $d^4q / (2\pi)^4$

$$
\begin{aligned}
&-i\mathcal{M}_{\mathrm{I}} \, (2\pi)^4 \, \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \\
&\quad = -i \, (2\pi)^4 g^2 \int \frac{1}{q^2 - m_C^2 c^2} \delta^{(4)}(p_1 - p_3 - q) \, \delta^{(4)}(p_2 + q - p_4) \; d^4q
\end{aligned}
$$

Dispersión $A + A \to B + B$

A orden más bajo (dos vértices), contribuyen dos diagramas:



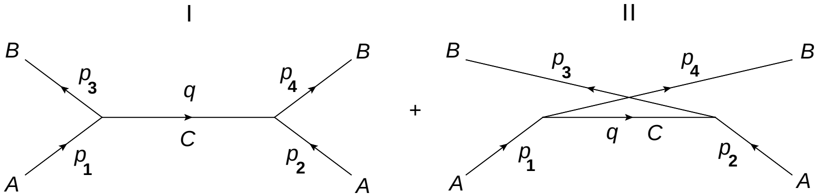
Calculemos primero el diagrama I:

- dos vértices: $(-ig)^2$
- un propagador: $\dfrac{i}{q^2 - m_C^2 c^2}$
- dos funciones delta: $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 - p_3 - q)$ y $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_2 + q - p_4)$
- una integración: $d^4 q / (2\pi)^4$

$$-i\mathcal{M}_{\mathrm{I}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)$$
$$= -i (2\pi)^4 g^2 \int \frac{1}{q^2 - m_C^2 c^2} \delta^{(4)}(p_1 - p_3 - q)\, \delta^{(4)}(p_2 + q - p_4)\; d^4 q$$

Dispersión $A + A \to B + B$

A orden más bajo (dos vértices), contribuyen dos diagramas:



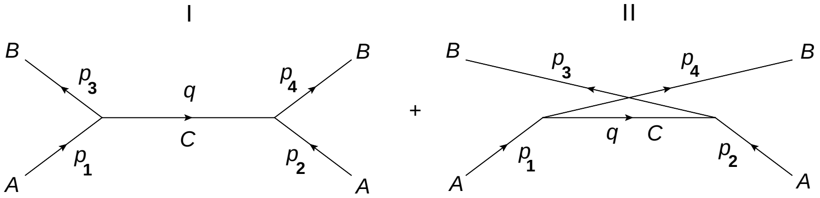
Calculemos primero el diagrama I:

- dos vértices: $(-ig)^2$
- un propagador: $\dfrac{i}{q^2 - m_C^2 c^2}$
- dos funciones delta: $(2\pi)^4\,\delta^{(4)}(p_1 - p_3 - q)$ y $(2\pi)^4\,\delta^{(4)}(p_2 + q - p_4)$
- una integración: $d^4q/(2\pi)^4$

$$-i\mathcal{M}_{\mathrm{I}}\,(2\pi)^4\,\delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)$$
$$= -i\,(2\pi)^4\,g^2 \int \frac{1}{q^2 - m_C^2 c^2}\,\delta^{(4)}(p_1 - p_3 - q)\,\delta^{(4)}(p_2 + q - p_4)\;d^4q$$

Dispersión $A + A \to B + B$

A orden más bajo (dos vértices), contribuyen dos diagramas:



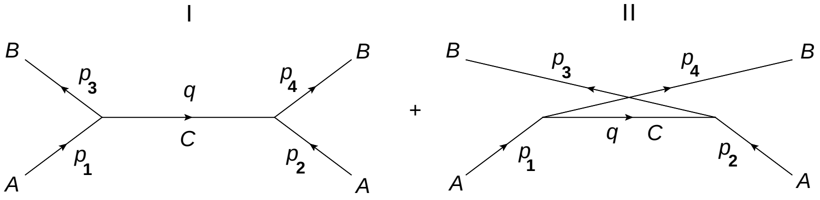
Calculemos primero el diagrama I:

- dos vértices: $(-ig)^2$
- un propagador: $\dfrac{i}{q^2 - m_C^2 c^2}$
- dos funciones delta: $(2\pi)^4\, \delta^{(4)}\,(p_1 - p_3 - q)$ y $(2\pi)^4\, \delta^{(4)}\,(p_2 + q - p_4)$
- una integración: $d^4q / (2\pi)^4$

$$
\begin{aligned}
&-i\mathcal{M}_{\mathrm{I}}\,(2\pi)^4\,\delta^{(4)}\,(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \\
&\quad = -i\,(2\pi)^4\, g^2 \int \frac{1}{q^2 - m_C^2 c^2}\,\delta^{(4)}\,(p_1 - p_3 - q)\,\delta^{(4)}\,(p_2 + q - p_4)\; d^4q
\end{aligned}
$$

Dispersión $A + A \to B + B$

A orden más bajo (dos vértices), contribuyen dos diagramas:



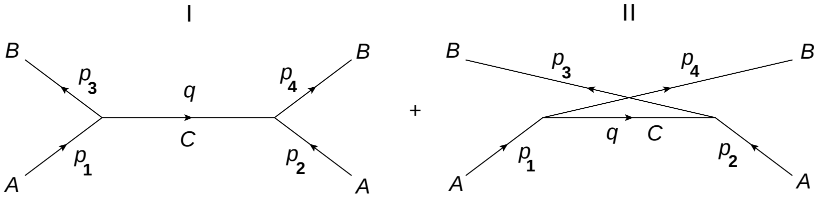
Calculemos primero el diagrama I:

- dos vértices: $(-ig)^2$
- un propagador: $\dfrac{i}{q^2 - m_C^2 c^2}$
- dos funciones delta: $(2\pi)^4 \, \delta^{(4)} (p_1 - p_3 - q)$ y $(2\pi)^4 \, \delta^{(4)} (p_2 + q - p_4)$
- una integración: $d^4 q / (2\pi)^4$

$$-i\mathcal{M}_{\mathrm{I}} \, (2\pi)^4 \, \delta^{(4)} (p_1 + p_2 - p_3 - p_4)$$
$$= -i \, (2\pi)^4 \, g^2 \int \frac{1}{q^2 - m_C^2 c^2} \delta^{(4)} (p_1 - p_3 - q) \, \delta^{(4)} (p_2 + q - p_4) \; d^4 q$$

Dispersión $A + A \to B + B$

A orden más bajo (dos vértices), contribuyen dos diagramas:



Calculemos primero el diagrama I:

- dos vértices: $(-ig)^2$
- un propagador: $\dfrac{i}{q^2 - m_C^2 c^2}$
- dos funciones delta: $(2\pi)^4\, \delta^{(4)}(p_1 - p_3 - q)$ y $(2\pi)^4\, \delta^{(4)}(p_2 + q - p_4)$
- una integración: $d^4q / (2\pi)^4$

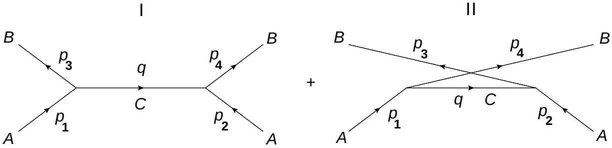
$$\begin{aligned} &-i\mathcal{M}_{\mathrm{I}}\,(2\pi)^4\,\delta^{(4)}(p_1+p_2-p_3-p_4) \\ &\qquad = -i\,(2\pi)^4\,g^2 \int \frac{1}{q^2 - m_C^2c^2}\,\delta^{(4)}(p_1-p_3-q)\,\delta^{(4)}(p_2+q-p_4)\;d^4q \end{aligned}$$

fuerza $q = p_4 - p_2$

$$
\begin{aligned}
&-i\mathcal{M}_{\mathrm{I}}\,(2\pi)^4\,\delta^{(4)}\,(p_1+p_2-p_3-p_4)\\
&= -i\,(2\pi)^4\,g^2\int \frac{1}{q^2-m_C^2c^2}\,\delta^{(4)}\,(p_1-p_3-q)\;\delta^{(4)}\,(p_2+q-p_4)\;d^4q\\
&= -ig^2\,\frac{1}{(p_4-p_2)^2-m_C^2c^2}\,(2\pi)^4\,\delta^{(4)}\,(p_1+p_2-p_3-p_4)
\end{aligned}
$$

Entonces,

$$
\boxed{\mathcal{M}_{\mathrm{I}} = \frac{g^2}{(p_4-p_2)^2-m_C^2c^2}}\;.
$$



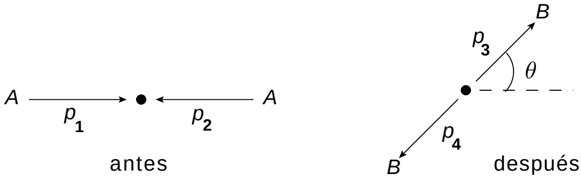
La amplitud para el diagrama II es simplemente

$$
\boxed{\mathcal{M}_{\mathrm{II}} = \mathcal{M}_{\mathrm{I}}\,(p_3\leftrightarrow p_4) = \frac{g^2}{(p_3-p_2)^2-m_C^2c^2}}\;.
$$

Entonces, a orden g^2, la amplitud para $A + A \to B + B$ es:

$$\boxed{\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\text{I}} + \mathcal{M}_{\text{II}} = \frac{g^2}{(p_4 - p_2)^2 - m_C^2 c^2} + \frac{g^2}{(p_3 - p_2)^2 - m_C^2 c^2}}$$

Asumamos $m_A = m_B = m$ y $m_C = 0$. En el sistema CM:



$$\left.\begin{aligned} (p_4 - p_2)^2 - m_C^2 c^2 &= -2\left|\vec{\mathbf{p}}\right|^2 (1 - \cos\theta) \\ (p_3 - p_2)^2 - m_C^2 c^2 &= -2\left|\vec{\mathbf{p}}\right|^2 (1 + \cos\theta) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{M} = -\frac{g^2}{\left|\vec{\mathbf{p}}\right|^2 \operatorname{sen}^2\theta}}$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{CM}} = \left(\frac{\hbar c}{8\pi}\right)^2 \frac{S\left|\mathcal{M}\right|^2}{(E_1 + E_2)^2} \Rightarrow \boxed{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{CM}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\hbar c g^2}{16\pi E\left|\vec{\mathbf{p}}\right|^2 \operatorname{sen}^2\theta}\right)^2}$$

Contenido

1 Introducción: ¿qué es la física de partículas?

2 Cinemática relativista

3 Decaimientos y dispersiones

4 Una teoría juguete

5 Electrodinámica cuántica (QED)

6 Teorías gauge

En mecánica cuántica no relativista, las partículas son descritas por la ecuación de Schrödinger.

En mecánica cuántica relativista:

espín	ecuación	describe, por ejemplo, a
espín 0	Klein-Gordon	piones, Higgs
espín $1/2$	Dirac	quarks y leptones
espín 1	Proca	$W^{\pm}$, Z

QED está basada en la ecuación de Dirac
– recordemos brevemente cómo deducirla ▶

La ecuación de Dirac

Trataremos de "factorizar" la relación de energía-momentum,

$$p_\mu p^\mu - m^2c^2 = 0 \left(= \left(p^0\right)^2 - \left(p^1\right)^2 - \left(p^2\right)^2 - \left(p^3\right)^2 - m^2c^2 \right) \ .$$

Asumamos primero que $\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{0}}$; en este caso, es sencillo factorizar:

$$\left(p^0\right)^2 - m^2c^2 = \left(p^0 + mc\right)\left(p^0 - mc\right) \ ,$$

de donde

$$\left(p^0 - mc\right) = 0 \quad \text{ó} \quad \left(p^0 + mc\right) = 0 \ .$$

Permitamos ahora $\vec{\mathbf{p}} \neq \vec{\mathbf{0}}$; buscamos una factorización en la forma

$$\begin{aligned}\left(p^\mu p_\mu - m^2c^2\right) &= \left(\beta^\kappa p_\kappa + mc\right)\left(\gamma^\lambda p_\lambda - mc\right) \\ &= \beta^\kappa\gamma^\lambda p_\kappa p_\lambda - mc\left(\beta^\kappa - \gamma^\kappa\right)p_\kappa - m^2c^2\ ,\end{aligned}$$

con β^κ y γ^λ ocho coeficientes por determinar.

Eliminamos los términos lineales en p_κ tomando $\beta^\kappa = \gamma^\kappa$.

Igualamos los términos cuadráticos:

$$p^\mu p_\mu = \gamma^\kappa\gamma^\lambda p_\kappa p_\lambda$$

Expandimos $p^\mu p_\mu = \gamma^\kappa \gamma^\lambda p_\kappa p_\lambda$:

$$\begin{aligned}
&\left(p^0\right)^2 - \left(p^1\right)^2 - \left(p^2\right)^2 - \left(p^3\right)^2 \\
&\quad = \left(\gamma^0\right)^2 \left(p^0\right)^2 + \left(\gamma^1\right)^2 \left(p^1\right)^2 + \left(\gamma^2\right)^2 \left(p^2\right)^2 + \left(\gamma^3\right)^2 \left(p^3\right)^2 \\
&\qquad + \left(\gamma^0\gamma^1 + \gamma^1\gamma^0\right) p_0 p_1 + \left(\gamma^0\gamma^2 + \gamma^2\gamma^0\right) p_0 p_2 + \left(\gamma^0\gamma^3 + \gamma^3\gamma^0\right) p_0 p_3 \\
&\qquad + \left(\gamma^1\gamma^2 + \gamma^2\gamma^1\right) p_1 p_2 + \left(\gamma^1\gamma^3 + \gamma^3\gamma^1\right) p_1 p_3 + \left(\gamma^2\gamma^3 + \gamma^3\gamma^2\right) p_2 p_3
\end{aligned}$$

Podríamos escoger $\gamma^0 = 1$ y $\gamma^1 = \gamma^2 = \gamma^3 = i$, pero no podemos deshacernos de los términos cruzados ...

... a menos que los γ's sean matrices, en vez de números

Como las matrices no conmutan, podríamos encontrar un conjunto tal que

$$\left(\gamma^0\right)^2 = 1 \quad , \quad \left(\gamma^1\right)^2 = \left(\gamma^2\right)^2 = \left(\gamma^3\right)^2 = -1 \quad ,$$
$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 0 \, , \quad \text{para } \mu \neq \nu$$

Equivalentemente,

anticonmutador: $\{A, B\} \equiv AB + BA$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$$

Las matrices más pequeñas que satisfacen $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ son 4×4.

En la convención de Bjorken-Drell:

$$\boxed{\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}} \quad ,$$

con σ^i ($i = 1, 2, 3$) las matrices de Pauli:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad .$$

Entonces, como una ecuación matricial 4×4, la relación de energía-momentum sí se factoriza:

$$p^\mu p_\mu - m^2c^2 = (\gamma^\kappa p_\kappa + mc)\left(\gamma^\lambda p_\lambda - mc\right) = 0 \; .$$

Escogemos uno de los términos, e.g.,

$$\gamma^\lambda p_\lambda - mc = 0 \; ,$$

sustituimos $p_\mu \to i\hbar\partial_\mu$ y aplicamos sobre la función de onda ψ, para hallar la ecuación de Dirac:

$$\boxed{(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\,\psi = 0} \; .$$

ψ es ahora un "bi-espinor", i.e., un vector columna de cuatro entradas:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \; .$$

Las soluciones de la ecuación de Dirac que usamos son ondas planas:

$$\psi(x) = ae^{-(i/\hbar)p\cdot x}u(p) \ ,$$

con a una constante de normalización y u un biespinor.

Es posible demostrar que existen dos soluciones para $E = \sqrt{m^2c^4 + |\vec{\mathbf{p}}|^2 c^2}$,

$$u^{(1)} = N\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{cp_z}{E+mc^2} \\ \dfrac{c(p_x+ip_y)}{E+mc^2} \end{pmatrix} \ , \quad u^{(2)} = N\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{c(p_x-ip_y)}{E+mc^2} \\ \dfrac{-cp_z}{E+mc^2} \end{pmatrix} \ ,$$

y dos soluciones para $E = -\sqrt{m^2c^4 + |\vec{\mathbf{p}}|^2 c^2}$,

$$u^{(3)} = N\begin{pmatrix} \dfrac{cp_z}{E-mc^2} \\ \dfrac{c(p_x+ip_y)}{E-mc^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \quad u^{(4)} = N\begin{pmatrix} \dfrac{c(p_x-ip_y)}{E-mc^2} \\ \dfrac{-cp_z}{E-mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ ,$$

con $N = \sqrt{(|E| + mc^2)/c}$ una constante de normalización.

Uno podría pensar que $u^{(1)}$ describe a un electrón con espín *up*, $u^{(2)}$ a un electrón con espín *down*, etc., pero en general no es así.

Matrices de espín para partículas Dirac:

$$\vec{\mathbf{S}} = \frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma} \quad , \quad \text{con} \quad \vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

En general, las $u^{(i)}$ no son autoestados de Σ_z.

Pero, si orientamos el eje z de manera que $p_x = p_y = 0$, entonces las $u^{(i)}$ sí son auto-biespinores de S_z:

- $u^{(1)}$ y $u^{(3)}$ son espín *up*
- $u^{(2)}$ y $u^{(4)}$ son espín *down*

$u^{(1)}$ y $u^{(2)}$ describen estados de electrón con $E > 0$

Pero $u^{(3)}$ y $u^{(4)}$ no pueden describir estados de positrón con $E < 0$, porque tanto e^- como e^+ tienen energía positiva.

soluciones de "energía negativa" = estados de antípartículas con "energía positiva"

$$v^{(1)}(E, \vec{\mathbf{p}}) = u^{(4)}(-E, -\vec{\mathbf{p}}) = N \begin{pmatrix} \frac{c(p_x - ip_y)}{E+mc^2} \\ \frac{-cp_z}{E+mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ,$$

$$v^{(2)}(E, \vec{\mathbf{p}}) = u^{(3)}(-E, -\vec{\mathbf{p}}) = N \begin{pmatrix} \frac{cp_z}{E+mc^2} \\ \frac{c(p_x + ip_y)}{E+mc^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ,$$

con $E = \sqrt{m^2c^4 + |\vec{\mathbf{p}}|^2 c^2} > 0$.

$v^{(1)}$ y $v^{(2)}$ describen estados de positrón con $E > 0$

	electrones	positrones
espacio de posición	$\psi(x) = a e^{-(i/\hbar) p\cdot x} u^{(s)}(p)$	$\psi(x) = a e^{(i/\hbar) p\cdot x} v^{(s)}(p)$
espacio de momentum	$(\gamma^\mu p_\mu - mc)\, u = 0$	$(\gamma^\mu p_\mu + mc)\, v = 0$

Definimos los adjuntos como

$$\bar{u} \equiv u^\dagger \gamma^0 \quad , \quad \bar{v} \equiv v^\dagger \gamma^0 \, .$$

Las soluciones son ortogonales,

$$\bar{u}^{(1)} u^{(2)} = 0 \quad , \quad \bar{v}^{(1)} v^{(2)} = 0 \quad ,$$

normalizadas,

$$\bar{u} u = 2mc \quad , \quad \bar{v} v = -2mc$$

y completas, i.e.,

$$\sum_{s=1,2} u^{(s)} \bar{u}^{(s)} = \gamma^\mu p_\mu + mc \quad , \quad \sum_{s=1,2} v^{(s)} \bar{v}^{(s)} = \gamma^\mu p_\mu - mc \quad .$$

El fotón

Las ecuaciones de Maxwell,

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{E}} = 4\pi\rho \quad , \qquad \nabla \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0 \quad ,$$
$$\nabla \times \vec{\mathbf{E}} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} = 0 \quad , \qquad \nabla \times \vec{\mathbf{B}} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{\mathbf{J}} \quad ,$$

pueden escribirse en notación relativista como

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu \, ,$$

con el tensor electromagnético dado por

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \, ,$$

el cuadripotencial

$$A^\mu = \left(V, \vec{\mathbf{A}}\right)$$

y la cuadricorriente

$$J^\mu = \left(c\rho, \vec{\mathbf{J}}\right) \; .$$

ec. de Klein-Gordon con $m = 0$

Con esto, las ecs. de Maxwell quedan

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \left(\partial_\mu A^\mu\right) = \frac{4\pi}{c} J^\nu \ .$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{en el gauge de Lorentz}\,(\partial_\mu A^\mu = 0) \\ \text{en el vacío}\,(J^\mu = 0) \end{array}\right\} \quad A^\mu \text{satisface la ecuación de onda}$$

$$\Box A^\mu = 0$$

$\Box \equiv \partial_\mu \partial^\mu$: operador d'Alembertiano

Solución de onda plana:

$$A^\mu(x) = a e^{-(i/\hbar) p\cdot x} \epsilon^\mu(p)$$

ϵ^μ: vector de polarización que caracteriza al espín del fotón

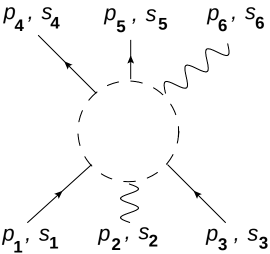
Dos posible orientaciones:

$$\epsilon_{(1)} = (1, 0, 0) \qquad \epsilon_{(2)} = (0, 1, 0)$$

Reglas de Feynman para QED

1. **Notación.** Etiquetar los cuadrimomentos entrantes y salientes $p_1, p_2,, \ldots, p_n$ y los correspondientes espines $s_1, s_2, \ldots, s_n$; etiquetar los cuadrimomentos internos $q_1, q_2, \ldots$

   Las flechas en líneas externas indican si es un e^- o un e^+; las flechas internas se asignan para que sigan la "dirección del flujo" a través del diagrama.



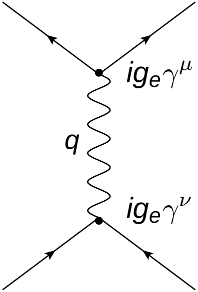
2. **Líneas externas.** Las líneas externas contribuyen con:

Electrones:	Entrantes	( ) :	u
	Salientes	( ) :	$\bar{u}$
Positrones:	Entrantes	( ) :	$\bar{v}$
	Salientes	( ) :	v
Fotones:	Entrantes	( ) :	ϵ^μ
	Salientes	( ) :	$\epsilon^{\mu *}$

3. **Factores de vértice.** Cada vértice contribuye un factor

$$ig_e\gamma^\mu,$$

con $g_e = \sqrt{4\pi\alpha}$ adimensional.



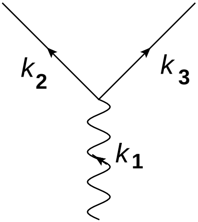
4. **Propagadores.** Cada línea interna contribuye un factor:

Electrones y positrones: $\frac{i(\gamma^\mu q_\mu + mc)}{q^2 - m^2c^2}$

Fotones: $\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}$

5. **Conservación de energía y momentum.**
Por cada vértice, escribir la función delta

$$(2\pi)^2\,\delta^{(4)}\,(k_1 + k_2 + k_3)$$



6. **Integrar sobre momentos internos.** Por cada momento interno q, escribir un factor

$$\frac{d^4q}{(2\pi)^4}$$

e integrar.

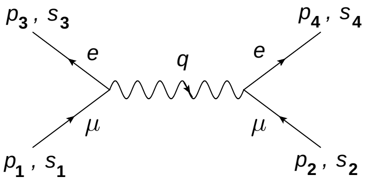
7. **Cancelar la función delta.** El resultado incluirá un factor

$$(2\pi)^4\,\delta^{(4)}\,(p_1 + p_2 + \ldots - p_n) \ ,$$

que corresponde a la conservación global de energía-momentum. Eliminarlo; lo que resta es $-i\mathcal{M}$.

8. **Antisimetrización.** Incluir un signo menos entre diagramas que difieren sólo en el intercambio de dos electrones (o positrones) entrantes (o salientes), o de un electrón entrante por un positrón saliente (o viceversa).

Ejemplo: dispersión electrón-muón



fuerza $q = p_1 - p_3$

Al aplicar las reglas de Feynman, vamos de adelante hacia atrás:

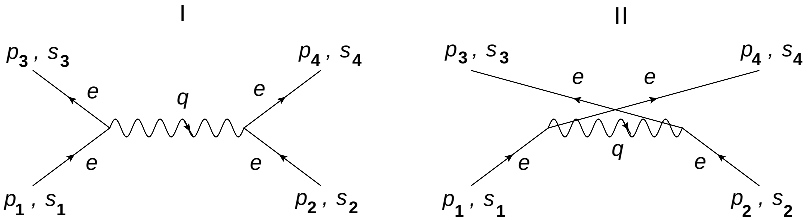
$$
\begin{aligned}
-i\mathcal{M}\,(2\pi)^4\,\delta^{(4)}\,(p_1+p_2-p_3-p_4) \\
= (2\pi)^4 \int \left[\bar{u}^{(s_3)}\,(p_3)\,(ig_e\gamma^\mu)\,u^{(s_1)}\,(p_1)\right] \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \left[\bar{u}^{(s_4)}\,(p_4)\,(ig_e\gamma^\nu)\,u^{(s_2)}\,(p_2)\right] \\
\times\ \delta^{(4)}\,(p_1-p_3-q)\ \delta^{(4)}\,(p_2+q-p_4)\ d^4q
\end{aligned}
$$

Integrando, obtenemos

$$\gamma^\mu g_{\mu\nu}\gamma^\nu = \gamma^\mu\gamma_\mu$$

$$\mathcal{M} = -\frac{g_e^2}{(p_1-p_3)^2}\left[\bar{u}^{(s_3)}\,(p_3)\,\gamma^\mu u^{(s_1)}\,(p_1)\right]\left[\bar{u}^{(s_4)}\,(p_4)\,\gamma_\mu u^{(s_2)}\,(p_2)\right]$$

Ejemplo: dispersión electrón-electrón



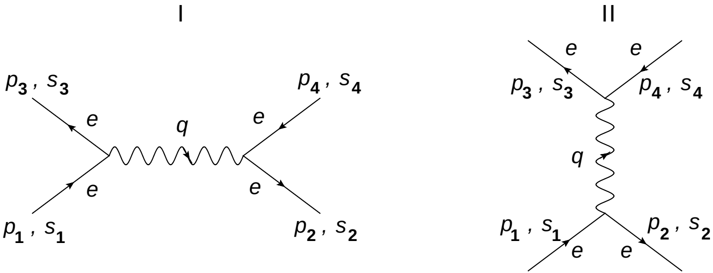
$$\mathcal{M}_{\mathrm{I}} = \mathcal{M}\left(e^-\mu^- \to e^-\mu^-\right) = -\frac{g_e^2}{\left(p_1 - p_3\right)^2}\left[\bar{u}\left(3\right)\gamma^\mu u\left(1\right)\right]\left[\bar{u}\left(4\right)\gamma_\mu u\left(2\right)\right]$$

$$\mathcal{M}_{\mathrm{II}} = \mathcal{M}_{\mathrm{I}}\left(p_3 \leftrightarrow p_4\right)$$

antisimetrización

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= \mathcal{M}_{\mathrm{I}} + \mathcal{M}_{\mathrm{II}} \\ &= -\frac{g_e^2}{\left(p_1 - p_3\right)^2}\left[\bar{u}\left(3\right)\gamma^\mu u\left(1\right)\right]\left[\bar{u}\left(4\right)\gamma_\mu u\left(2\right)\right] \\ &\quad + \frac{g_e^2}{\left(p_1 - p_4\right)^2}\left[\bar{u}\left(4\right)\gamma^\mu u\left(1\right)\right]\left[\bar{u}\left(3\right)\gamma_\mu u\left(2\right)\right]\end{aligned}$$

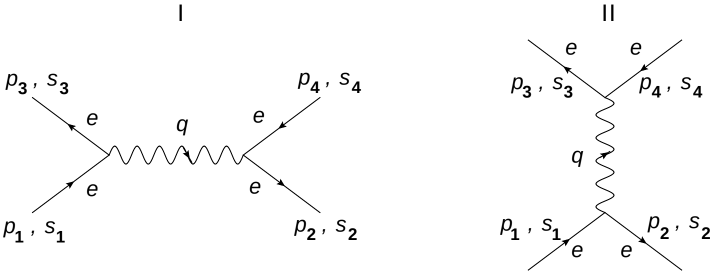
Ejemplo: dispersión electrón-positrón



El primer diagrama es similar al de la disipersión electrón-muón:

$$
\begin{aligned}
-i\mathcal{M}_{\mathrm{I}}\,(2\pi)^4\,\delta^{(4)}\,(p_1+p_2-p_3-p_4) \\
= (2\pi)^4 \int \left[\bar{u}\,(3)\,(ig_e\gamma^{\mu})\,u\,(1)\right] \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \left[\bar{v}\,(2)\,(ig_e\gamma^{\nu})\,v\,(4)\right] \\
\times\ \delta^{(4)}\,(p_1-p_3-q)\,\delta^{(4)}\,(p_2+q-p_4)\ d^4q
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \boxed{\mathcal{M}_{\mathrm{I}} = -\frac{g_e^2}{(p_1-p_3)^2}\left[\bar{u}\,(3)\,\gamma^{\mu}u\,(1)\right]\left[\bar{v}\,(2)\,\gamma_{\mu}v\,(4)\right]}
$$

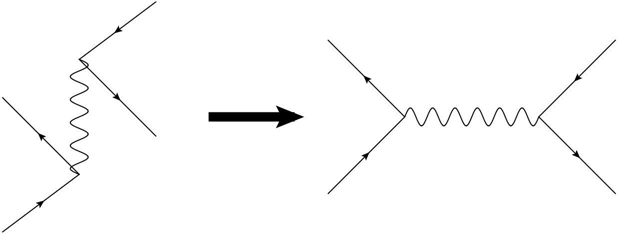


Segundo diagrama:

$$
\begin{aligned}
&-i\mathcal{M}_{\text{II}}\,(2\pi)^4\,\delta^{(4)}\,(p_1+p_2-p_3-p_4)\\
&\quad=(2\pi)^4\int[\bar{u}\,(3)\,(ig_e\gamma^\mu)\,v\,(4)]\,\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}\,[\bar{v}\,(2)\,(ig_e\gamma^\nu)\,u\,(1)]\\
&\qquad\times\,\delta^{(4)}\,(q-p_3-p_4)\,\delta^{(4)}\,(p_1+p_2-q)\;d^4q
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow\ \boxed{\mathcal{M}_{\text{II}}=-\frac{g_e^2}{(p_1+p_2)^2}\,[\bar{u}\,(3)\,\gamma^\mu v\,(4)]\,[\bar{v}\,(2)\,\gamma_\mu u\,(1)]}
$$

Cambiando el positrón entrante por el electrón saliente en el segundo diagrama y redibujándolo, recuperamos el primer diagrama:

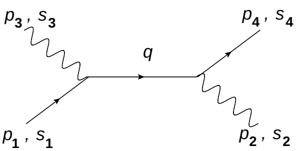


Por lo tanto, debemos restar las amplitudes $\mathcal{M}_{\mathrm{I}}$ y $\mathcal{M}_{\mathrm{II}}$:

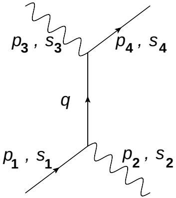
$$\begin{aligned}\mathcal{M} = & -\frac{g_e^2}{(p_1 - p_3)^2}\left[\bar{u}(3)\gamma^\mu u(1)\right]\left[\bar{v}(2)\gamma_\mu v(4)\right] \\ & + \frac{g_e^2}{(p_1 + p_2)^2}\left[\bar{u}(3)\gamma^\mu v(4)\right]\left[\bar{v}(2)\gamma_\mu u(1)\right]\end{aligned}$$

Ejemplo: dispersión de Compton ($\gamma + e \to \gamma + e$)

I



II



$\not{q} \equiv \gamma^\mu q_\mu$

$$-i\mathcal{M}_{\mathrm{I}}\,(2\pi)^4\,\delta^{(4)}\,(p_1+p_2-p_3-p_4)$$

$$= (2\pi)^4 \int \epsilon_\mu\,(2)\left[\bar{u}\,(4)\,(ig_e\gamma^\mu)\,\frac{i\left(\not{q}+mc\right)}{(q^2-m^2c^2)}\,(ig_e\gamma^\nu)\,u\,(1)\right]\epsilon_\nu\,(3)^*$$

$$\delta^{(4)}\,(p_1-p_3-q)\,\delta^{(4)}\,(p_2+q-p_4)\;d^4q$$

$$\mathcal{M}_{\mathrm{I}} = \frac{g_e^2}{(p_1-p_3)^2-m^2c^2}\left[\bar{u}\,(4)\,\not{\epsilon}\,(2)\,(\not{p}_1-\not{p}_3+mc)\,\not{\epsilon}\,(3)^*\,u\,(1)\right]$$

$$\mathcal{M}_{\mathrm{II}} = \frac{g_e^2}{(p_1+p_2)^2-m^2c^2}\left[\bar{u}\,(4)\,\not{\epsilon}\,(3)^*\,(\not{p}_1+\not{p}_2+mc)\,\not{\epsilon}\,(2)\,u\,(1)\right]$$

Suma y promedio sobre espines

Un experimento típico ...

- comienza con un haz de partículas con espines orientados aleatoriamente
- cuenta el número de partículas dispersadas en una cierta dirección

Para calcular la sección de choque relevante, entonces ...

- promediamos sobre todas las configuraciones de espín iniciales; y
- sumamos sobre todas las configuraciones de espín finales

$$\langle|\mathcal{M}|^2\rangle \equiv \frac{\sum_{\text{espines iniciales}} \sum_{\text{espines finales}} |\mathcal{M}|^2}{\text{número de configuraciones iniciales}}$$

Consideremos la amplitud para la dispersión electrón-muón:

$$\mathcal{M} = -\frac{g_e^2}{(p_1 - p_3)^2} \left[\bar{u}(3)\gamma^\mu u(1)\right]\left[\bar{u}(4)\gamma_\mu u(2)\right]$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow |\mathcal{M}|^2 &= \frac{g_e^4}{(p_1 - p_3)^4} \left[\bar{u}(3)\gamma^\mu u(1)\right] \left[\bar{u}(4)\gamma_\mu u(2)\right] \left[\bar{u}(3)\gamma^\nu u(1)\right]^* \left[\bar{u}(4)\gamma_\nu u(2)\right]^* \\
&= \frac{g_e^4}{(p_1 - p_3)^4} \color{blue}{\left[\bar{u}(3)\gamma^\mu u(1)\right] \left[\bar{u}(3)\gamma^\nu u(1)\right]^*} \color{red}{\left[\bar{u}(4)\gamma_\mu u(2)\right] \left[\bar{u}(4)\gamma_\nu u(2)\right]^*}
\end{aligned}$$

Tenemos términos de la forma

$$G \equiv \left[\bar{u}(a)\Gamma_1 u(b)\right]\left[\bar{u}(a)\Gamma_2 u(b)\right]^* \; ,$$

con Γ_1 y Γ_2 dos matrices 4×4.

$$G \equiv [\bar{u}(a)\,\Gamma_1 u(b)]\,[\bar{u}(a)\,\Gamma_2 u(b)]^*$$

Como

$$[\bar{u}(a)\,\Gamma_2 u(b)]^* = \bar{u}(b)\,\bar{\Gamma}_2 u(a) \;,$$

con $\bar{\Gamma}_2 \equiv \gamma^0 \Gamma_2^\dagger \gamma^0$, entonces

$$G = [\bar{u}(a)\,\Gamma_1 u(b)]\left[\bar{u}(b)\,\bar{\Gamma}_2 u(a)\right] \;.$$

Sumamos sobre las orientaciones del espín de la partícula b:

$$\begin{aligned}
\sum_{\text{espines } b} G &= \bar{u}(a)\,\Gamma_1 \underbrace{\left\{\sum_{s_b=1,2} u^{(s_b)}(p_b)\,\bar{u}^{(s_b)}(p_b)\right\}}_{\text{relación de completitud}} \bar{\Gamma}_2 u(a) \\
&= \bar{u}(a)\,\Gamma_1 \left(\not{p}_b + m_b c\right) \bar{\Gamma}_2 u(a) \\
&\equiv \bar{u}(a)\, Q\, u(a)
\end{aligned}$$

Ahora sumamos sobre las orientaciones del espín de la partícula a:

$$\sum_{\text{espines } a} \sum_{\text{espines } b} G = \sum_{s_a=1,2} \bar{u}^{(s_a)}(p_a)\, Q u^{(s_a)}(p_a) \ .$$

Escribiendo la multiplicación matricial explícitamente, tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{s_a=1,2} \bar{u}^{(s_a)}(p_a)_i\, Q_{ij} u^{(s_a)}(p_a)_j &= Q_{ij} \left\{ \sum_{s_a=1,2} u^{(s_a)}(p_a)\, \bar{u}^{(s_a)}(p_a) \right\}_{ji} \\ &= Q_{ij}\left(\not{p}_a + m_a c\right)_{ji} = \mathrm{Tr}\left(Q\left(\not{p}_a + m_a c\right)\right) \ . \end{aligned}$$

Entonces,

$$\sum_{\text{espines}} \left[\bar{u}(a)\Gamma_1 u(b)\right]\left[\bar{u}(a)\Gamma_2 u(b)\right]^* = \mathrm{Tr}\left[\Gamma_1\left(\not{p}_b + m_b c\right)\bar{\Gamma}_2\left(\not{p}_a + m_a c\right)\right]$$

Ejemplo: dispersión electrón-muón

$$\sum_{\text{espines}} \left[\bar{u}(a)\Gamma_1 u(b)\right]\left[\bar{u}(a)\Gamma_2 u(b)\right]^* = \text{Tr}\left[\Gamma_1 \left(\not{p}_b + m_b c\right)\bar{\Gamma}_2 \left(\not{p}_a + m_a c\right)\right]$$

Teníamos

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{g_e^4}{(p_1 - p_3)^4} \underbrace{\left[\bar{u}(3)\gamma^\mu u(1)\right]\left[\bar{u}(3)\gamma^\nu u(1)\right]^*}_{G_1} \underbrace{\left[\bar{u}(4)\gamma_\mu u(2)\right]\left[\bar{u}(4)\gamma_\nu u(2)\right]^*}_{G_2}$$

Para G_1:

$$\left\{\begin{array}{l} \Gamma_1 = \gamma^\mu \\ \Gamma_2 = \gamma^\nu \Rightarrow \bar{\Gamma}_2 = \gamma^0 \gamma^{\nu\dagger}\gamma^0 = \gamma^\nu \end{array}\right. \Rightarrow \sum_{\text{espines}} G_1 = \text{Tr}\left[\gamma^\mu \left(\not{p}_1 + m_e c\right)\gamma^\nu \left(\not{p}_3 + m_e c\right)\right]$$

Para G_2:

$$\sum_{\text{espines}} G_2 = \text{Tr}\left[\gamma_\mu \left(\not{p}_2 + m_\mu c\right)\gamma_\nu \left(\not{p}_4 + m_\mu c\right)\right]$$

Entonces, multiplicando por $1/4$ para promediar, obtenemos

$$\boxed{\begin{aligned}\langle|\mathcal{M}|^2\rangle = \frac{g_e^4}{4(p_1 - p_3)^4} &\text{Tr}\left[\gamma^\mu \left(\not{p}_1 + m_e c\right)\gamma^\nu \left(\not{p}_3 + m_e c\right)\right] \\ &\times \text{Tr}\left[\gamma_\mu \left(\not{p}_2 + m_\mu c\right)\gamma_\nu \left(\not{p}_4 + m_\mu c\right)\right]\end{aligned}}$$

Cálculo de trazas

Hemos reducido todo al problema de calcular la traza de un producto complicado de matrices γ.

Para esto, usamos propiedades de las matrices γ y teoremas de trazas:

1. $\mathrm{Tr}\,(A+B) = \mathrm{Tr}\,(A) + \mathrm{Tr}\,(B)$
2. $\mathrm{Tr}\,(\alpha A) = \alpha \mathrm{Tr}\,(A)$
3. $\mathrm{Tr}\,(AB) = \mathrm{Tr}\,(BA)$
4. $g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 4$
5. $\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$
6. $\gamma_\mu \gamma^\mu = 4$
7. $\gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\mu = -2\gamma^\nu$
8. $\gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\mu = 4g^{\nu\lambda}$
9. $\gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma \gamma^\mu = -2\gamma^\sigma \gamma^\lambda \gamma^\nu$
10. La traza de un producto de número impar de matrices γ es cero.
11. $\mathrm{Tr}\,(1) = 4$
12. $\mathrm{Tr}\,(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$
13. $\mathrm{Tr}\left(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma\right) = 4\left(g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} - g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda}\right)$

Ejemplo: dispersión electrón-muón

Teníamos

$$\langle|\mathcal{M}|^2\rangle = \frac{g_e^4}{4\left(p_1-p_3\right)^4}\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu\left(\not{p}_1+m_ec\right)\gamma^\nu\left(\not{p}_3+m_ec\right)\right]$$
$$\times\mathrm{Tr}\left[\gamma_\mu\left(\not{p}_2+m_\mu c\right)\gamma_\nu\left(\not{p}_4+m_\mu c\right)\right]$$

Expandimos la primera traza:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu\left(\not{p}_1+m_ec\right)\gamma^\nu\left(\not{p}_3+m_ec\right)\right]\\&\quad=\mathrm{Tr}\left(\gamma^\mu\not{p}_1\gamma^\nu\not{p}_3\right)+m_ec\left[\mathrm{Tr}\left(\gamma^\mu\not{p}_1\gamma^\nu\right)+\mathrm{Tr}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\not{p}_3\right)\right]+\left(m_ec\right)^2\mathrm{Tr}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\right)\end{aligned}$$

Según la regla 10, el término entre corchetes es cero.

El último término se evalúa con la regla 12:

$$\mathrm{Tr}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\right)=4g^{\mu\nu}$$

El primer término lo evaluamos usando la regla 13:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\left(\gamma^\mu\not{p}_1\gamma^\nu\not{p}_3\right) &= \left(p_1\right)_\lambda\left(p_3\right)_\sigma\mathrm{Tr}\left(\gamma^\mu\gamma^\lambda\gamma^\nu\gamma^\sigma\right)\\ &= \left(p_1\right)_\lambda\left(p_3\right)_\sigma 4\left(g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma}-g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma}+g^{\mu\sigma}g^{\lambda\nu}\right)\\ &= 4\left(p_1^\mu p_3^\nu-g^{\mu\nu}\left(p_1\cdot p_3\right)+p_3^\mu p_1^\nu\right)\end{aligned}$$

Entonces, la primera traza queda

$$\mathrm{Tr}\left[\gamma^{\mu}\left(\not{p}_1 + m_e c\right)\gamma^{\nu}\left(\not{p}_3 + m_e c\right)\right] = 4\left[p_1^{\mu} p_3^{\nu} + p_3^{\mu} p_1^{\nu} + g^{\mu\nu}\left((m_e c)^2 - (p_1 \cdot p_3)\right)\right]$$

La segunda traza es igual, con $m_e \to m_{\mu}$, 1 $\to$ 2, 3 $\to$ 4 y los índices covariantes.

Entonces:

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{4g_e^4}{(p_1 - p_3)^4}\left[p_1^{\mu} p_3^{\nu} + p_3^{\mu} p_1^{\nu} + g^{\mu\nu}\left((m_e c)^2 - (p_1 \cdot p_3)\right)\right] \times \left[p_2^{\mu} p_4^{\nu} + p_4^{\mu} p_2^{\nu} + g^{\mu\nu}\left((m_{\mu} c)^2 - (p_2 \cdot p_4)\right)\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{8g_e^4}{(p_1 - p_3)^4}\left[(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) - (m_{\mu} c)^2 (p_1 \cdot p_3) - (m_e c)^2 (p_2 \cdot p_4) + 2\left(m_e m_{\mu} c^2\right)^2\right]}$$

Contenido

1. Introducción: ¿qué es la física de partículas?
2. Cinemática relativista
3. Decaimientos y dispersiones
4. Una teoría juguete
5. Electrodinámica cuántica (QED)
6. Teorías gauge

teoría cuántica de campos $=$ mecánica cuántica $+$ relatividad especial

Describe:

- creación y aniquilación de partículas
- las interacciones entre ellas

e.g., Modelo Estándar: describe todas las partículas elementales conocidas (hasta energías de $\sim$ 1 TeV)

Veremos:

- cómo se construye una teoría cuántica de campos sencilla (QED)
- cómo el mecanismo de Higgs genera las masas de los bosones masivos

teoría cuántica de campos $=$ mecánica cuántica $+$ relatividad especial

Describe:

- creación y aniquilación de partículas
- las interacciones entre ellas

e.g., Modelo Estándar: describe todas las partículas elementales conocidas (hasta energías de $\sim$ 1 TeV)

Veremos:

- cómo se construye una teoría cuántica de campos sencilla (QED)
- cómo el mecanismo de Higgs genera las masas de los bosones masivos

teoría cuántica de campos $=$ mecánica cuántica $+$ relatividad especial

Describe:

- creación y aniquilación de partículas
- las interacciones entre ellas

e.g., Modelo Estándar: describe todas las partículas elementales conocidas (hasta energías de $\sim$ 1 TeV)

Veremos:

- cómo se construye una teoría cuántica de campos sencilla (QED)
- cómo el mecanismo de Higgs genera las masas de los bosones masivos

teoría cuántica de campos $=$ mecánica cuántica $+$ relatividad especial

Describe:

- creación y aniquilación de partículas
- las interacciones entre ellas

e.g., Modelo Estándar: describe todas las partículas elementales conocidas (hasta energías de $\sim$ 1 TeV)

Veremos:

- cómo se construye una teoría cuántica de campos sencilla (QED)
- cómo el mecanismo de Higgs genera las masas de los bosones masivos

teoría cuántica de campos = mecánica cuántica + relatividad especial

Describe:
- creación y aniquilación de partículas
- las interacciones entre ellas

e.g., Modelo Estándar: describe todas las partículas elementales conocidas (hasta energías de $\sim$ 1 TeV)

Veremos:
- cómo se construye una teoría cuántica de campos sencilla (QED)
- cómo el mecanismo de Higgs genera las masas de los bosones masivos

teoría cuántica de campos $=$ mecánica cuántica $+$ relatividad especial

Describe:
- creación y aniquilación de partículas
- las interacciones entre ellas

e.g., Modelo Estándar: describe todas las partículas elementales conocidas (hasta energías de $\sim$ 1 TeV)

Veremos:
- cómo se construye una teoría cuántica de campos sencilla (QED)
- cómo el mecanismo de Higgs genera las masas de los bosones masivos

Recordemos la formulación Lagrangiana de la mecánica clásica:

$$L = T - U$$

Energía cinética: $T\left(q_i, \dot{q}_i\right) = \frac{1}{2} m \left| \overrightarrow{\dot{q}} \right|^2$

Energía potencial: $U = U\left(q_i\right)$

$q_1 = x,\, q_2 = y,\, q_3 = z,\, \dot{q}_1 = v_x,\, \dot{q}_2 = v_y,\, \dot{q}_3 = v_z$

Del principio variacional,

$$\delta \int L\left(q_i, \dot{q}_i\right) dt = 0 \ ,$$

se deducen las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}} \ .$$

En teoría de campos, las variables dinámicas son ahora los campos $\phi_i\left(t, \overrightarrow{x}\right) \equiv \phi_i\left(x\right)$ que describen a las partículas.

Introducimos la "densidad Lagrangiana"

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left[\phi_i\left(t, \overrightarrow{x}\right), \partial_\mu \phi_i\left(t, \overrightarrow{x}\right)\right]$$

a partir de la cual el Lagrangiano se calcula como

$$L = \int \mathcal{L}\, dx^4 \, .$$

Ecuaciones de Euler-Lagrange:

Antes	Ahora
$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}$	$\partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \phi_i\right)}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i}$

En teoría de campos, las variables dinámicas son ahora los campos $\phi_i\left(t,\overrightarrow{x}\right) \equiv \phi_i\left(x\right)$ que describen a las partículas.

Introducimos la "densidad Lagrangiana"

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left[\phi_i\left(t,\overrightarrow{x}\right), \partial_\mu \phi_i\left(t,\overrightarrow{x}\right)\right]$$

a partir de la cual el Lagrangiano se calcula como

$$L = \int \mathcal{L}\, dx^4 \; .$$

Ecuaciones de Euler-Lagrange:

Antes

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

Ahora

$$\boxed{\partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \phi_i\right)}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i}}$$

Lagrangiano de Klein-Gordon para un campo escalar (espín 0)

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\mu \phi_i \right)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i}$$

Supongamos un solo campo escalar ϕ y el Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \phi \right) \left(\partial^\mu \phi \right) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \ .$$

Entonces:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\mu \phi \right)} = \partial^\mu \phi \Rightarrow \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\mu \phi \right)} \right) = \partial_\mu \partial^\mu \phi \equiv \Box \phi$$

y

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi \ .$$

Ecuación de Euler-Lagrange:

$$\boxed{\left(\Box + m^2 \right) \phi = 0} \ ,$$

que es la ecuación de Klein-Gordon que describe (en teoría cuántica de campos) una partícula de espín 0 y masa m.

Lagrangiano de Dirac para un campo espinorial (espín $1/2$)

Consideremos el campo espinorial ψ y el Lagrangiano

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \ .$$

Tratamos a ψ y su adjunto, $\bar{\psi}$, como variables de campo independientes.

Ecuación de Euler-Lagrange para $\bar{\psi}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial\mathcal{L}/\partial\left(\partial_\mu\bar{\psi}\right) = 0 \\ \partial\mathcal{L}/\partial\bar{\psi} = i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi = 0} \ ,$$

que es la ecuación de Dirac.

Ecuación de Euler-Lagrange para ψ:

$$\boxed{i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0} \ ,$$

que el adjunto de la ecuación de Dirac.

Lagrangiano de Proca para un campo vectorial (espín 1)

Tomemos el campo vectorial A^μ, con el Lagragiano

$$\mathcal{L} = \frac{-1}{16\pi}\left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right)\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right) + \frac{1}{8\pi} m^2 A^\nu A_\nu \ .$$

Calculamos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu A \nu\right)} = \frac{-1}{4\pi}\left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = \frac{1}{4\pi} m^2 A^\nu \ ,$$

con lo cual la ecuación de Euler-Lagrange queda

$$\boxed{\partial_\mu\left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right) + m^2 A^\nu = 0} \ ,$$

que es la ecuación de Proca para una partícula de espín 1 y masa m.

Lagrangiano de Proca para un campo vectorial (espín 1) [cont.]

Si definimos

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \ ,$$

entonces podemos escribir

$$\mathcal{L} = \frac{-1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{8\pi} m^2 A^\nu A_\nu$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0 \ .$$

Si ponemos $m = 0$, la ecuación de Proca se reduce a las ecuaciones de Maxwell en el vacío:

el campo e.m. es un campo vectorial no masivo.

En mecánica clásica, L se deriva a partir de T y U: $L = T - U$.

En teoría de campos relativista, $\mathcal{L}$ es usualmente axiomático.

$\mathcal{L}$ se construye para poder reproducir las ecuaciones de campo deseadas: Klein-Gordon, Dirac, Proca, etc.

Hasta ahora hemos considerado sólo campos *libres*, sin fuentes ni interacciones. ▶

Lagrangiano de Maxwell para un campo vectorial no masivo con fuente J^μ

Supongamos

$$\mathcal{L} = \frac{-1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - J^\mu A_\mu \ ,$$

con $J^\mu = \left(\rho, \overrightarrow{J}\right)$ (la cuadricorriente) alguna función dada.

Ecuación de Euler-Lagrange:

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi J^\nu} \ ,$$

que son las ecuaciones no homogéneas de Maxwell, pues

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} .$$

Como $\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\nu \partial_\mu \left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \right) = 0$, entonces

$$\partial_\nu J^\nu = 0 \text{ (ec. de continuidad)} \ ,$$

i.e., J^μ debe respetar la conservación de la carga.

Invariancia gauge global

El Lagrangiano de Dirac,

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \ ,$$

es invariante bajo la transformación

$$\boxed{\psi \to e^{i\theta}\psi} \ ,$$

con θ real, dado que

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi \to e^{i\theta}\psi \\ \bar{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma^0 \to e^{-i\theta}\bar{\psi} \end{array} \right. \Rightarrow \left(e^{-i\theta}\bar{\psi}\right)\left(e^{i\theta}\psi\right) = \bar{\psi}\psi \ .$$

$\psi \to e^{i\theta}\psi$ se conoce como transformación gauge global o transformación de fase global.

Invariancia gauge local

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi$$

Consideremos ahora que el factor de fase sea diferente en diferentes puntos del espacio-tiempo, i.e., $\theta = \theta(x)$ y

$$\boxed{\psi \longrightarrow e^{i\theta(x)}\psi} \ .$$

$\mathcal{L}$ no es invariante bajo esta transformación gauge local, debido a la derivada de θ:

$$\partial_{\mu}\left(e^{i\theta}\psi\right) = i\left(\partial_{\mu}\theta\right)e^{i\theta}\psi + e^{i\theta}\partial_{\mu}\psi \ ,$$

con lo cual

$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L} - \left(\partial_{\mu}\theta\right)\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi \ .$$

¿Cómo hacer que $\mathcal{L}$ sea invariante bajo transformaciones gauge locales?

Conviene definir

$$\lambda(x) \equiv (1/q)\,\theta(x) \ ,$$

con q la carga de la partícula involucrada, de manera que, bajo $\psi \to e^{-iq\lambda(x)}\psi$,

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} + \left(q\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi\right)\partial_{\mu}\lambda \ .$$

Demandamos que el Lagrangiano completo sea invariante.

Dado que el Lagrangiano libre no lo es, debemos añadirle algo:

$$\boxed{\mathcal{L} = i\bar{\psi}\left(\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)\psi - \left(q\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi\right)A_{\mu}} \ ,$$

donde A_{μ} es un nuevo campo ("campo gauge") que, bajo transformaciones gauge locales, transforma como

$$A_{\mu} \to A_{\mu} + \partial_{\mu}\lambda \ .$$

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\left(\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)\psi - \boxed{\left(q\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi\right)A_{\mu}}$$

Veamos ...

$$\mathcal{L} \;\rightarrow\; i\bar{\psi}\left(\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)\psi + \left(q\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi\right)\partial_{\mu}\lambda - \left(q\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi\right)A_{\mu} - \left(q\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi\right)\partial_{\mu}\lambda$$
$$= \mathcal{L}$$

El nuevo Lagrangiano sí es invariante bajo transformaciones gauge locales.

Tuvimos que introducir un nuevo campo vectorial A_{μ} que se acopla con ψ a través del término

Pero aún falta un término para describir al campo A_{μ} libre ▶

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\left(\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)\psi - \boxed{\left(q\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi\right)A_{\mu}}$$

Veamos ...

$$\mathcal{L} \quad \rightarrow \quad \underbrace{i\bar{\psi}\left(\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)\psi + \left(q\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi\right)\partial_{\mu}\lambda - \left(q\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi\right)A_{\mu} - \left(q\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi\right)\partial_{\mu}\lambda}_{=\mathcal{L}}$$

El nuevo Lagrangiano sí es invariante bajo transformaciones gauge locales.

Tuvimos que introducir un nuevo campo vectorial A_{μ} que se acopla con ψ a través del término

Pero aún falta un término para describir al campo A_{μ} libre ▶

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\left(\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)\psi - \boxed{\left(q\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi\right)A_{\mu}}$$

Veamos ...

$$\mathcal{L} \;\rightarrow\; \underbrace{i\bar{\psi}\left(\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)\psi + \cancel{\left(q\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi\right)\partial_{\mu}\lambda} - \left(q\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi\right)A_{\mu} - \cancel{\left(q\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi\right)\partial_{\mu}\lambda}}_{=\mathcal{L}}$$

El nuevo Lagrangiano sí es invariante bajo transformaciones gauge locales.

Tuvimos que introducir un nuevo campo vectorial A_{μ} que se acopla con ψ a través del término

Pero aún falta un término para describir al campo A_{μ} libre ▶

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\left(\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\psi - \boxed{\left(q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right) A_\mu}$$

Veamos ...

$$\mathcal{L} \;\rightarrow\; i\bar{\psi}\left(\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\psi + \left(q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right)\partial_\mu\lambda - \left(q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right) A_\mu - \left(q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right)\partial_\mu\lambda$$
$$= \mathcal{L}$$

El nuevo Lagrangiano sí es invariante bajo transformaciones gauge locales.

Tuvimos que introducir un nuevo campo vectorial A_μ que se acopla con ψ a través del término

Pero aún falta un término para describir al campo A_μ libre ▶

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\left(\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi - \boxed{\left(q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right)A_\mu}$$

Veamos ...

$$\mathcal{L} \;\rightarrow\; i\bar{\psi}\left(\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi + \left(q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right)\partial_\mu\lambda - \left(q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right)A_\mu - \left(q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right)\partial_\mu\lambda$$
$$= \mathcal{L}$$

El nuevo Lagrangiano sí es invariante bajo transformaciones gauge locales.

Tuvimos que introducir un nuevo campo vectorial A_μ que se acopla con ψ a través del término

Pero aún falta un término para describir al campo A_μ libre ▶

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\left(\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\psi - \boxed{\left(q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right) A_\mu}$$

Veamos ...

$$\mathcal{L} \quad \to \quad i\bar{\psi}\left(\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\psi + \left(q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right)\partial_\mu\lambda - \left(q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right) A_\mu - \left(q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right)\partial_\mu\lambda$$
$$= \mathcal{L}$$

El nuevo Lagrangiano sí es invariante bajo transformaciones gauge locales.

Tuvimos que introducir un nuevo campo vectorial A_μ que se acopla con ψ a través del término

Pero aún falta un término para describir al campo A_μ libre ▶

Como A_μ es campo vectorial, lo describimos con el Lagrangiano de Proca:

$$\mathcal{L} = \frac{-1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{8\pi} m_A^2 A^\nu A_\nu \ .$$

$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ es invariante, pero $A^\nu A_\nu$, no:

$$A^\nu A_\nu \to A^\nu A_\nu + A^\nu \partial_\nu \lambda + \partial_\nu \lambda A^\nu + (\partial_\nu \lambda)^2 \ .$$

$\therefore$ el campo gauge debe ser no masivo ($m_A = 0$) para respetar invariancia de gauge local

¿Qué hemos hecho?

- Partimos del Lagrangiano de Dirac
- Impusimos invariancia gauge local
- Nos vimos forzados a introducir un campo vectorial no masivo (A^μ)

El Lagrangiano completo es entonces

$$\mathcal{L} = \underbrace{i\bar{\psi}\left(\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\psi}_{\mathcal{L}_{\text{fermión}}} + \underbrace{\left[\frac{-1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}\right]}_{\mathcal{L}_{\text{bosón}}} - \underbrace{\left(q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right) A_\mu}_{\mathcal{L}_{\text{int}}}$$

A^μ es el potencial e.m., que interactúa con el campo masivo ψ a través del acoplamiento $\left(q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right) A_\mu \equiv J^\mu A_\mu$, con J^μ la corriente de Dirac.

$\therefore$ la imposición de invariancia gauge local, aplicada al Lagrangiano libre de Dirac, genera toda la electrodinámica

Luego de cuantizar los campos ψ y A_μ, obtendríamos QED.

La transformación gauge global puede verse como la aplicación de una matriz 1×1 unitaria sobre ψ:

$$\psi \to U\psi \quad , \qquad \text{con } U^\dagger U = 1 \,,$$

donde $U = e^{i\theta}$.

$U(1)$: grupo de todas estas matrices

Simetría involucrada: “invariancia gauge $U(1)$”.

simetría local bajo ...	interacción descrita
$U(1)$	electromagnética
$SU(2)$	débil
$SU(3)$	fuerte

Model Estándar: invariante bajo $\boxed{SU(3) \times SU(2) \times U(1)}$

Hasta ahora, los Lagrangianos que hemos considerado describen campos *clásicos*.

$$\begin{array}{ccc} \text{teoría clásica de campos} & \xrightarrow{\text{segunda cuantización}} & \text{teoría cuántica de campos} \\ \text{(campos clásicos)} & & \text{(campos operadores)} \end{array}$$

Las *partículas* emergen como los "cuantos" de los campos asociados:

simetría	interacción	campo gauge	partícula asociada
$U(1)$	electromagnética	A^μ	fotón
$SU(2)$	débil	$W^\pm$, Z^0	bosones débiles
$SU(3)$	fuerte	$g_1, \ldots, g_8$	gluones

Veamos cómo encontrar las reglas de Feynman para un Lagrangiano dado ▶

Hasta ahora, los Lagrangianos que hemos considerado describen campos *clásicos*.

$$\underset{\text{(campos clásicos)}}{\text{teoría clásica de campos}} \xrightarrow{\text{segunda cuantización}} \underset{\text{(campos operadores)}}{\text{teoría cuántica de campos}}$$

Las *partículas* emergen como los "cuantos" de los campos asociados:

simetría	interacción	campo gauge	partícula asociada
$U(1)$	electromagnética	A^μ	fotón
$SU(2)$	débil	$W^\pm, Z^0$	bosones débiles
$SU(3)$	fuerte	$g_1, \ldots, g_8$	gluones

Veamos cómo encontrar las reglas de Feynman para un Lagrangiano dado ▶

Hasta ahora, los Lagrangianos que hemos considerado describen campos *clásicos*.

$$\begin{array}{ccc} \text{teoría clásica de campos} & \xrightarrow{\text{segunda cuantización}} & \text{teoría cuántica de campos} \\ \text{(campos clásicos)} & & \text{(campos operadores)} \end{array}$$

Las *partículas* emergen como los “cuantos” de los campos asociados:

simetría	interacción	campo gauge	partícula asociada
$U(1)$	electromagnética	A^μ	fotón
$SU(2)$	débil	$W^\pm, Z^0$	bosones débiles
$SU(3)$	fuerte	$g_1, \ldots, g_8$	gluones

Veamos cómo encontrar las reglas de Feynman para un Lagrangiano dado ▶

Hasta ahora, los Lagrangianos que hemos considerado describen campos *clásicos*.

$$\begin{array}{c} \text{teoría clásica de campos} \\ \text{(campos clásicos)} \end{array} \xrightarrow{\text{segunda cuantización}} \begin{array}{c} \text{teoría cuántica de campos} \\ \text{(campos operadores)} \end{array}$$

Las *partículas* emergen como los “cuantos” de los campos asociados:

simetría	interacción	campo gauge	partícula asociada
$U(1)$	electromagnética	A^μ	fotón
$SU(2)$	débil	$W^\pm, Z^0$	bosones débiles
$SU(3)$	fuerte	$g_1, \ldots, g_8$	gluones

Veamos cómo encontrar las reglas de Feynman para un Lagrangiano dado ▶

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{libre}} + \mathcal{L}_{\text{int}}$$

$\mathcal{L}_{\text{libre}}$: Klein-Gordon (espín 0), Dirac (espín $1/2$), Proca (espín 1), etc.

Lagrangiano libre $\rightarrow$ propagador

Términos de interacción $\rightarrow$ factores de vértice

Ecuaciones de campo libre:

	espacio de posición	espacio de momentum
Klein-Gordon	$\left(\partial_\mu \partial^\mu + m^2\right)\phi = 0$	$\left[p^2 - m^2\right]\phi = 0$
Dirac	$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$	$[\not{p} - m]\,\psi = 0$
Proca	$\partial_\mu\left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right) + m^2 A^\nu = 0$	$\left[\left(-p^2 + m^2\right) g_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu\right] A^\nu = 0$

El propagador es el inverso del factor entre corchetes ($[\ldots]$) $\times i$:

Propagador de espín 0 : $\dfrac{i}{p^2 - m^2}$

Propagador de espín $\dfrac{1}{2}$: $\dfrac{i}{\not{p} - mc} = i\,\dfrac{\not{p} + m}{p^2 - m^2}$

Propagador de espín 1 : $\dfrac{-i}{p^2 - m^2}\left[g_{\mu\nu} - \dfrac{p_\mu p_\nu}{m^2}\right]$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{libre}} + \mathcal{L}_{\text{int}}$$

$\mathcal{L}_{\text{libre}}$: Klein-Gordon (espín 0), Dirac (espín $1/2$), Proca (espín 1), etc.

Lagrangiano libre $\rightarrow$ propagador

Términos de interacción $\rightarrow$ factores de vértice

Ecuaciones de campo libre:

	espacio de posición	espacio de momentum
Klein-Gordon	$\left(\partial_\mu \partial^\mu + m^2\right) \phi = 0$	$\left[p^2 - m^2\right] \phi = 0$
Dirac	$\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right) \psi = 0$	$\left[\not{p} - m\right] \psi = 0$
Proca	$\partial_\mu \left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right) + m^2 A^\nu = 0$	$\left[\left(-p^2 + m^2\right) g_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu\right] A^\nu = 0$

El propagador es el inverso del factor entre corchetes ($[\ldots]$) $\times i$:

Propagador de espín 0 : $\dfrac{i}{p^2 - m^2}$

Propagador de espín $\dfrac{1}{2}$: $\dfrac{i}{\not{p} - mc} = i\,\dfrac{\not{p} + m}{p^2 - m^2}$

Propagador de espín 1 : $\dfrac{-i}{p^2 - m^2}\left[g_{\mu\nu} - \dfrac{p_\mu p_\nu}{m^2}\right]$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{libre}} + \mathcal{L}_{\text{int}}$$

$\mathcal{L}_{\text{libre}}$: Klein-Gordon (espín 0), Dirac (espín $1/2$), Proca (espín 1), etc.

$$\begin{array}{rcl} \text{Lagrangiano libre} & \rightarrow & \text{propagador} \\ \text{Términos de interacción} & \rightarrow & \text{factores de vértice} \end{array}$$

Ecuaciones de campo libre:

	espacio de posición	espacio de momentum
Klein-Gordon	$\left(\partial_\mu \partial^\mu + m^2\right)\phi = 0$	$\left[p^2 - m^2\right]\phi = 0$
Dirac	$\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\psi = 0$	$\left[\not{p} - m\right]\psi = 0$
Proca	$\partial_\mu\left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right) + m^2 A^\nu = 0$	$\left[\left(-p^2 + m^2\right) g_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu\right] A^\nu = 0$

El propagador es el inverso del factor entre corchetes ($[\ldots]$) $\times i$:

$$\text{Propagador de espín 0}: \frac{i}{p^2 - m^2}$$

$$\text{Propagador de espín } \frac{1}{2}: \frac{i}{\not{p} - mc} = i\,\frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2}$$

$$\text{Propagador de espín 1}: \frac{-i}{p^2 - m^2}\left[g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{m^2}\right]$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{libre}} + \mathcal{L}_{\text{int}}$$

$\mathcal{L}_{\text{libre}}$: Klein-Gordon (espín 0), Dirac (espín $1/2$), Proca (espín 1), etc.

$$\begin{array}{rcl} \text{Lagrangiano libre} & \rightarrow & \text{propagador} \\ \text{Términos de interacción} & \rightarrow & \text{factores de vértice} \end{array}$$

Ecuaciones de campo libre:

	espacio de posición	espacio de momentum
Klein-Gordon	$\left(\partial_\mu \partial^\mu + m^2\right)\phi = 0$	$\left[p^2 - m^2\right]\phi = 0$
Dirac	$\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\psi = 0$	$\left[\not{p} - m\right]\psi = 0$
Proca	$\partial_\mu\left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right) + m^2 A^\nu = 0$	$\left[\left(-p^2 + m^2\right) g_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu\right] A^\nu = 0$

El propagador es el inverso del factor entre corchetes ($[\ldots]$) $\times i$:

$$\text{Propagador de espín 0}: \frac{i}{p^2 - m^2}$$

$$\text{Propagador de espín } \frac{1}{2}: \frac{i}{\not{p} - mc} = i\,\frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2}$$

$$\text{Propagador de espín 1}: \frac{-i}{p^2 - m^2}\left[g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{m^2}\right]$$

Para hallar el propagador del fotón (espín 1 no masivo), volvamos a la ecuación de Maxwell para campo libre:

$$\partial_\mu \left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right) = 0 \; .$$

Usamos la condición de Lorentz para determinar A^μ, i.e.,

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \; ,$$

con lo que la ecuación de campo se reduce a

$$\partial^2 A^\nu = 0 \xrightarrow{p_\mu \to i\partial_\mu} \left(-p^2 g_{\mu\nu}\right) A^\nu = 0 \; .$$

Entonces, el propagador del fotón es:

$$\boxed{\text{Propagador de espín 1, no masivo} : -i\frac{g_{\mu\nu}}{p^2}}$$

Para obtener los factores de vértice:

- Escribimos $i\mathcal{L}_{\text{int}}$ en el espacio de momentum
- Los campos involucrados determinan la estructura de la interacción

e.g., para QED,

$$i\mathcal{L}_{\text{int}} = -i\left(q\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi\right)A_{\mu}$$

Tres campos involucrados ($\bar{\psi}$, ψ, A_{μ}): un fermión entrante, un fermión saliente y un fotón.

Para obtener el factor de vértice, "borramos" los campos:

$$-i\sqrt{4\pi}q\gamma^{\mu} \equiv ig_e\gamma^{\mu}$$

Para obtener los factores de vértice:

- Escribimos $i\mathcal{L}_{\text{int}}$ en el espacio de momentum
- Los campos involucrados determinan la estructura de la interacción

e.g., para QED,

$$i\mathcal{L}_{\text{int}} = -i\left(q\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi\right)A_{\mu}$$

Tres campos involucrados ($\bar{\psi}$, ψ, A_{μ}): un fermión entrante, un fermión saliente y un fotón.

Para obtener el factor de vértice, “borramos” los campos:

$$-i\sqrt{4\pi}q\gamma^{\mu} \equiv ig_e\gamma^{\mu}$$

Para obtener los factores de vértice:

- Escribimos $i\mathcal{L}_{\text{int}}$ en el espacio de momentum
- Los campos involucrados determinan la estructura de la interacción

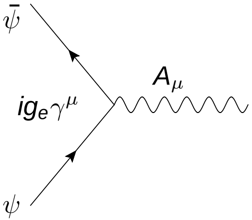
e.g., para QED,

$$i\mathcal{L}_{\text{int}} = -i\left(q\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi\right)A_{\mu}$$

Tres campos involucrados ($\bar{\psi}$, ψ, A_{μ}): un fermión entrante, un fermión saliente y un fotón.

Para obtener el factor de vértice, "borramos" los campos:

$$\boxed{-i\sqrt{4\pi}q\gamma^{\mu} \equiv ig_e\gamma^{\mu}}$$



El término de masa

La invariancia gauge local ...

- funciona para interacciones e.m. y fuertes (fotón y gluones no masivos)
- no se cumple para interacciones débiles ($W^{\pm}$ y Z^0 masivos)

Problema: término de masa en $\mathcal{L}_{\text{Proca}}$ no es invariante –

$$\mathcal{L}_{\text{Proca}} = \frac{-1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{8\pi} m^2 A^{\nu} A_{\nu}$$

¿Podemos adaptar la invariancia gauge local para campos masivos?

Sí, usando ...

- rompimiento espontáneo de la simetría
- mecanismo de Higgs

Aprendamos primero a identificar el término de masa ▶

Consideremos el siguiente Lagrangiano para un escalar ϕ:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi\right)\left(\partial^\mu \phi\right) + e^{-(\alpha\phi)^2} \quad (\alpha \in \mathcal{R}) \ .$$

A primera vista, parece un campo no masivo.

Pero si expandimos ...

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi\right)\left(\partial^\mu \phi\right) + 1 - \alpha^2\phi^2 + \frac{1}{2}\alpha^4\phi^4 - \frac{1}{6}\alpha^6\phi^6 + \ldots$$

y comparamos con

$$\mathcal{L}_{\text{Klein-Gordon}} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi\right)\left(\partial^\mu \phi\right) - \frac{1}{2}m^2\phi^2 ,$$

vemos que el segundo término es un término de masa con

$$m = \sqrt{2}\alpha \ .$$

El término de masa puede estar "disfrazado".

Para identificarlo, expandimos y buscamos el término de segundo orden en los campos (ϕ, ψ, A^μ, etc.).

Consideremos ahora

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) \boxed{+\frac{1}{2}\mu^2\phi^2} - \frac{1}{4}\lambda^2\phi^4 \quad (\mu, \lambda \in \mathcal{R})$$

parece un término de masa, pero tiene el signo equivocado (¡*m* no puede ser imaginario!)

¿Qué hacer?

El cálculo de Feynman es un procedimiento perturbativo:

- partimos del estado base (el "vacío") – la configuración de energía mínima
- tratamos a los campos como perturbaciones al estado base

Para los Lagrangianos previos, $\phi = 0$ ha sido el estado base.

Para el nuevo $\mathcal{L}$, no; hallaremos cuál es ▶

Escribamos

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U} \ ,$$

con

término "cinético" : $\mathcal{T} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$

término "potencial" : $\mathcal{U}(\phi) = -\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda^2\phi^4$

El mínimo de $\mathcal{U}$ ocurre en

$$\phi = \pm\mu/\lambda.$$

Escribamos

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U} \ ,$$

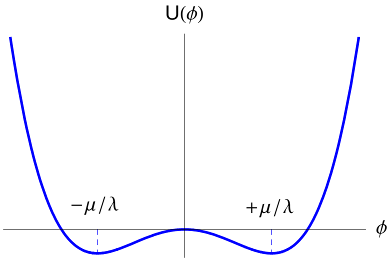
con

$$\text{término “cinético”} : \mathcal{T} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$$

$$\text{término “potencial”} : \mathcal{U}(\phi) = -\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda^2\phi^4$$

El mínimo de $\mathcal{U}$ ocurre en

$$\phi = \pm\mu/\lambda.$$



Desviación respecto del estado base:

$$\eta \equiv \phi \pm \mu/\lambda$$

En términos de η,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \eta\right)\left(\partial^\mu \eta\right) \boxed{-\mu^2\eta^2} \pm \mu\lambda\eta^3 - \frac{1}{4}\lambda^2\eta^4 + \frac{1}{4}\left(\mu^2/\lambda\right)^2$$

Este es el mismo Lagrangiano, escrito en forma distinta.

El segundo término es ahora un término de masa con signo correcto, para

$$\boxed{m = \sqrt{2}\mu}$$

Desviación respecto del estado base:

$$\eta \equiv \phi \pm \mu/\lambda$$

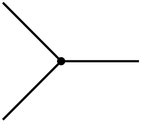
En términos de η,

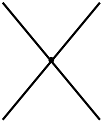
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \eta\right)\left(\partial^\mu \eta\right) \boxed{-\mu^2\eta^2} \pm \mu\lambda\eta^3 - \frac{1}{4}\lambda^2\eta^4 + \frac{1}{4}\left(\mu^2/\lambda\right)^2$$

Este es el mismo Lagrangiano, escrito en forma distinta.

El segundo término es ahora un término de masa con signo correcto, para

$$\boxed{m = \sqrt{2}\mu}$$

$\mu\lambda\eta^3 \equiv$ 

$\frac{1}{4}\lambda^2\eta^4 \equiv$ 

Rompimiento espontáneo de simetría

Para encontrar el término de masa:

- expresamos $\mathcal{L}$ en función de la perturbación respecto del estado base
- al hacer esto, hemos “roto” una simetría discreta de $\mathcal{L}$

Forma original:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi\right)\left(\partial^\mu \phi\right) + \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 - \frac{1}{4}\lambda^2\phi^4$$

$\longmapsto$ invariante bajo $\phi \to -\phi$

Forma en términos de η:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \eta\right)\left(\partial^\mu \eta\right) - \mu^2\eta^2 \pm \mu\lambda\eta^3 - \frac{1}{4}\lambda^2\eta^4 + \frac{1}{4}\left(\mu^2/\lambda\right)^2$$

$\longmapsto$ no invariante bajo $\eta \to -\eta$

rompimiento espontáneo de simetría: el vacío elegido ($\phi = \mu/\lambda$) no tiene las mismas simetrías que $\mathcal{L}$

Veamos cómo se rompe espontáneamente una simetría continua.

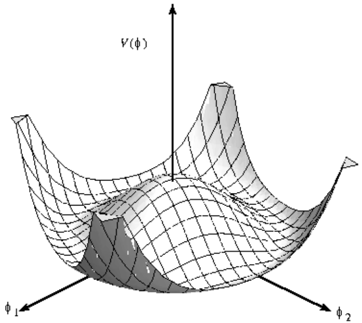
Consideremos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi_1\right)\left(\partial^\mu \phi_1\right) + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi_2\right)\left(\partial^\mu \phi_2\right) + \frac{1}{2}\mu^2\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right) - \frac{1}{4}\lambda^2\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right)^2$$

Invariante ante rotaciones en el espacio ϕ_1, ϕ_2, i.e., $SO(2)$-simétrico.

Potencial:

$$\mathcal{U} = -\frac{1}{2}\mu^2\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right) + \frac{1}{4}\lambda^2\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right)^2$$



Los mínimos están sobre el círculo $\phi_{1\,\text{min}}^2 + \phi_{2\,\text{min}}^2 = \mu^2/\lambda^2$.

Escogemos un mínimo particular,

$$\phi_{1\,\text{min}} = \mu/\lambda \quad , \qquad \phi_{2\,\text{min}} = 0 \ ,$$

y definimos las fluctuaciones respecto de él:

$$\eta \equiv \phi_1 - \mu/\lambda \quad , \qquad \xi \equiv \phi_2 \ .$$

Con esto,

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \quad &= \quad \left[\frac{1}{2}\left(\partial_\mu \eta\right)\left(\partial^\mu \eta\right) -\mu^2\eta^2\right] + \left[\frac{1}{2}\left(\partial_\mu \xi\right)\left(\partial^\mu \xi\right)\right] \\ &\quad + \left[\mu\lambda\left(\eta^3 + \eta\xi^2\right) - \frac{\lambda^2}{4}\left(\eta^4 + \xi^4 + 2\eta^2\xi^2\right)\right] + \mu^4/\left(4\lambda^2\right) \ .\end{aligned}$$

En esta forma, $\mathcal{L}$ ya no es invariante bajo $SO\,(2)$.

η es ahora masivo: $m_\eta = \sqrt{2}\mu$

Aparece un escalar no masivo, ξ ($m_\xi = 0$).

Teorema de Goldstone:
El rompimiento espontáneo de una simetría continua global siempre está acompañado de la aparición de uno o más campos escalares (espín 0) no masivos (“bosones de Goldstone”).

Problema:
Los bosones escalares no masivos no existen en el conjunto de partículas elementales conocidas.

Solución:
El mecanismo de Higgs: rompimiento espontáneo de una simetría gauge local.

Teorema de Goldstone:
El rompimiento espontáneo de una simetría continua global siempre está acompañado de la aparición de uno o más campos escalares (espín 0) no masivos (“bosones de Goldstone”).

Problema:
Los bosones escalares no masivos no existen en el conjunto de partículas elementales conocidas.

Solución:
El mecanismo de Higgs: rompimiento espontáneo de una simetría gauge local.

Teorema de Goldstone:
El rompimiento espontáneo de una simetría continua global siempre está acompañado de la aparición de uno o más campos escalares (espín 0) no masivos ("bosones de Goldstone").

Problema:
Los bosones escalares no masivos no existen en el conjunto de partículas elementales conocidas.

Solución:
El mecanismo de Higgs: rompimiento espontáneo de una simetría gauge local.

El mecanismo de Higgs

Escribamos

$$\phi \equiv \phi_1 + \phi_2 \Rightarrow \phi\phi^* = \phi_1^2 + \phi_2^2$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi\right)^* \left(\partial^\mu \phi\right) + \frac{1}{2}\mu^2 \left(\phi^* \phi\right) - \frac{1}{4}\lambda^2 \left(\phi^* \phi\right)^2$$

La simetría bajo $SO\,(2)$ se ha convertido en simetría bajo $U\,(1)$:

$$\phi \rightarrow e^{i\theta}\phi\ .$$

Para hacer a $\mathcal{L}$ invariante bajo transformaciones gauge locales

$$\phi \rightarrow e^{i\theta(x)}\phi\ ,$$

introducimos el campo gauge A^μ:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \;&=\; \frac{1}{2}\left[\left(\partial_\mu - iqA_\mu\right)\phi^*\right]\left[\left(\partial^\mu + iqA_\mu\right)\phi\right] \\ &\quad +\frac{1}{2}\mu^2 \left(\phi^* \phi\right) - \frac{1}{4}\lambda^2 \left(\phi^* \phi\right)^2 - \frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\ . \end{aligned}$$

Definimos los nuevos campos

$$\eta \equiv \phi_1 - \mu/\lambda \quad , \qquad \xi \equiv \phi_2 \ ,$$

con lo cual

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \;=\; & \left[\tfrac{1}{2}\left(\partial_\mu \eta\right)\left(\partial^\mu \eta\right) - \mu^2\eta^2\right] + \left[\tfrac{1}{2}\left(\partial_\mu \xi\right)\left(\partial^\mu \xi\right)\right] \\ & + \left[-\tfrac{1}{16\pi} F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \tfrac{1}{2}\left(q\tfrac{\mu}{\lambda}\right)^2 A_\mu A^\mu\right] - 2i\left(\frac{\mu}{\lambda}q\right)\left(\partial_\mu \xi\right) A^\mu \\ & + \left\{q\left[\eta\left(\partial_\mu \xi\right) - \xi\left(\partial_\mu \eta\right)\right] A^\mu + \tfrac{\mu}{\lambda} q^2 \eta \left(A_\mu A^\mu\right) + \tfrac{1}{2} q^2 \left(\xi^2 + \eta^2\right)\left(A_\mu A^\mu\right)\right. \\ & \quad \left. -\lambda\mu\left(\eta^3 + \eta\xi^2\right) - \tfrac{1}{4}\lambda^2\left(\eta^4 + 2\eta^2\xi^2 + \xi^4\right)\right\} + \left(\frac{\mu^2}{2\lambda}\right)^2\end{aligned}$$

Escalar con masa $m_\eta = \sqrt{2}\mu$

Bosón de Goldstone

Campo gauge libre A^μ masivo: $m_A = 2\sqrt{\pi}\,(q\mu/\lambda)$

Acoplamientos entre A^μ, η, ξ

Rotemos ϕ:

$$\begin{aligned}\phi \to \phi' &= (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)(\phi_1 + \phi_2)\\ &= (\phi_1\cos\theta - \phi_2 \operatorname{sen}\theta) + i(\phi_1 \operatorname{sen}\theta + \phi_2\cos\theta)\end{aligned}$$

Si escogemos $\theta = -\arctan(\phi_2/\phi_1)$, entonces ϕ' será real, i.e., $\xi' = \phi_2' = 0$.

En este gauge,

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = &\left[\frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)(\partial^\mu\eta) - \mu^2\eta^2\right] + \left[-\frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\left(q\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 A_\mu A^\mu\right]\\ &+ \left\{\frac{\mu}{\lambda}q^2\eta(A_\mu A^\mu) + \frac{1}{2}q^2\eta^2(A_\mu A^\mu) - \lambda\mu\eta^3 - \frac{1}{4}\lambda^2\eta^4\right\}\\ &+ \left(\frac{\mu^2}{2\lambda}\right)^2\end{aligned}$$

Eliminamos el bosón de Goldstone.

Nos quedamos con un escalar masivo η (el bosón de Higgs) y un campo gauge masivo A^μ $\to$ mecanismo de Higgs

Bibliografía seleccionada

Introducción a la física de partículas:

- *Introduction to elementary particles*
  D. Griffiths; John Wiley & Sons, 1987
- *Quarks and leptons: an introductory course in modern particle physics*
  F. Halzen, A. D. Martin; John Wiley & Sons, 1984

Teoría cuántica de campos (nivel introductorio):

- *Quantum field theory*
  F. Mandl, G. Shaw; John Wiley & Sons, 1984
- *Quantum field theory in a nutshell*
  A. Zee; Princeton University Press, 2010

Teoría cuántica de campos (nivel intermedio):

- *An introduction to quantum field theory*
  M. E. Peskin, D. V. Schroeder; Westview Press, 1995

Teoría cuántica de campos (nivel avanzado):

- *The quantum theory of fields vols. 1-3*
  S. Weinberg; Cambridge University Press, 2005

Modelo Estándar:

- *Gauge theories of the strong, weak, and electromagnetic interactions*
  C. Quigg; Westview Press, 1997

Teoría de grupos:

- *Lie groups for pedestrians*
  H. J. Lipkin; Dover, 1966